P- فضاها و ویژگی آرتین‌ـ ریس

فریبرز آذرپناه[۱]، سوسن افروز

گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۰/۱۳

چکیده: در این مقاله ویژگی آرتین‌ـ ریس را در حلقه‌ی $C(X)$، در حلقه‌ی کسرهای $C(X)$ و حلقه‌های خارج قسمتی $C(X)$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم $C(X)/(f)$ یک حلقه ی آرتین‌ـ ریس است اگر و تنها اگر $Z(f)$ یک Pـ فضای باز باشد . در این مقاله نشان داده شده است که X یک Pـ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)$ دارای یک ایدآل ماکسیمال آرتین‌ـ ریس باشد. ثابت کرده‌ایم که یک شرط لازم و کافی برای آن‌که حلقه های موضعی $C(X)$ آرتین‌ـ ریس باشند این است که هر ایدآل اول $C(X)$ مینیمال باشد و از آن‌جا معلوم می‌شود که هر حلقه‌ی موضعی $C(X)$ یک حلقه ی آرتین‌ـ ریس است اگر و تنها اگر X یک Pـ فضا باشد. سرانجام نشان داده‌ایم که اگر $X \setminus Z(f)$ در X یک Cـ نشانده‌ی چگال باشد، آن‌گاه $C(X)_f$ منظم است اگر و تنها اگر $X \setminus Z(f)$ یک Pـ فضا باشد .

واژه‌های کلیدی: ویژگی آرتین- ریس، Pـ فضا، حلقه‌ی کسرهای $C(X)$،C ـ نشانده، حلقه‌ی موضعی $C(X)$، منظم.

رده‌بندی ریاضی: ۵۴C۴۰، ۱۳A۳۰

۱-پیشگفتار

در این مقاله، $C(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی فضای توپولوژی کاملاً منظم و هاسدرف X است که همراه با دو عمل جمع و ضرب توابع، تشکیل یک حلقه می‌دهد. هدف اصلی در مطالعه‌ی $C(X)$، برقراری ارتباط ویژگی‌های جبری $C(X)$ با ویژگی‌های توپولوژیکی X می‌باشد. در این نوشتار نیز این هدف دنبال می‌شود، ویژگی آرتین‌ـ ریس را برای برخی از حلقه‌ها که در ارتباط با حلقه‌ی $C(X)$ هستند، بررسی می‌کنیم و در مقابل، خواص توپولوژیکی X را به‌دست می‌آوریم. برای هر $f \in C(X)$ مجموعه‌ی

[۱]-آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: فریبرز آذرپناه azarpanah@ipm.ir.

$\{x \in X : f(x)=0\}$ را با $Z(f)$ نشان می‌دهیم و آن را صفرمجموعه‌ی f می‌نامیم. خانواده‌ی همه‌ی صفر مجموعه‌ها را با $Z(X)$ نشان می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $Z(X)$ تحت اشتراک شمارا و اجتماع متناهی بسته است و اگر $f, g \in C(X)$، آن‌گاه $Z(f) \bigcup Z(g) = Z(fg)$ و $Z(f) \bigcap Z(g) = Z(f^2+g^2)$. آشکارا هر عنصر $Z(X)$ در X بسته است، در صورتی‌که همه‌ی عناصر $Z(X)$ باز هم باشند، آن‌گاه فضای X را Pـ فضا می‌نامیم. فضای X یک Pـ فضا است اگر و تنها اگر حلقه‌ی $C(X)$ منظم باشد؛ یعنی، برای هر $f \in C(X)$، تابع $g \in C(X)$ وجود داشته باشد که $f^2 g = f$، $4P$ در [۷] را ببینید. شرط های معادل جبری و توپولوژیکی برای Pـ فضاها بسیارند، برای مثال، چند مورد را می‌توان در [۷] ملاحظه کرد. مثلاً به‌سادگی می‌توان دید که فضای X یک Pـ فضا است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، داشته باشیم $O_x = M_x$ که در آن $M_x = \{f \in C(X) : x \in Z(f)\}$ و $O_x = \{f \in C(X) : x \in \operatorname{int}_X Z(f)\}$. برای هر $x \in X$، مجموعه‌های M_x و O_x در $C(X)$، اید آل هستند. افزون بر آن، M_x یک ایدآل ماکسیمال است. ایدآل های ماکسیمال حلقه‌ی $C(X)$ تنها به این‌صورت نیستند، بلکه $\mathfrak{M} = \{M^x : x \in \beta X\}$ خانواده‌ی همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ می‌باشد که در آن βX فشرده سازی استون‌ـ چک فضای X است. وقتی که $x \in X$، آن‌گاه M^x را به‌صورت M_x نشان می‌دهیم و آن را یک ایدآل ماکسیمال ثابت می‌نامیم. ایدآل I در $C(X)$ را یک zـ ایدآل گوییم هرگاه $Z(f) \subseteq Z(g)$، $f \in I$ و $g \in C(X)$ نتیجه دهد $g \in I$. به‌عبارت دیگر I یک zـ ایدآل است هرگاه برای هر $f \in I$، داشته باشیم $M_f \subseteq I$ که در آن M_f برابر با اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال شامل f است (منبع [۲] را ببینید). برای پاره‌ای از نمادها و تعریف‌هایی که به آن‌ها اشاره نشده و در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌شود، خواننده را به [۷] ارجاع می‌دهیم.

در یک حلقه‌ی R می‌گوییم ایدآل I دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس است هرگاه برای هر ایدآل J در R، عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $I^n \bigcap J \subseteq IJ$. در صورتی‌که هر ایدآل حلقه‌ی R دارای این ویژگی باشد، R را حلقه‌ی آرتین‌ـ ریس می‌نامیم. در حالت کلی، اگر I یک ایدآل در حلقه‌ی R باشد به‌گونه‌ای که برای هر دو زیرایدآل I مانند J و K، عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $J^n \bigcap K \subseteq JK$، آن‌گاه I یک ایدآل آرتین‌ـ ریس نامیده می‌شود. ایدآل I در یک حلقه را ناب می‌گوییم، اگر برای هر $f \in I$، عنصر $g \in I$ وجود داشته باشد که $f = fg$. از آن‌جا که هر zـ ایدآل نیم ـ اول است، یک ایدآل در $C(X)$، یک zـ ایدآل با ویژگی آرتین‌ـ ریس است اگر و تنها اگر ناب باشد. در واقع اگر ایدآل I در $C(X)$ ناب باشد و $f \in I$، $g \in C(X)$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$، آن‌گاه $h \in I$ وجود دارد که $f = hf$. از آن‌جا که $Z(f) \subseteq Z(g)$ و روی $X \setminus Z(f)$ داریم $h = 1$، آشکارا $g = hg$ و از این رو

$g = hg \in I$؛ یعنی، I یک zـ ایدآل است . آشکارا I دارای ویژگی آرتین- ریس هم هست. به عکس، فرض کنیم I یک zـ ایدآل با ویژگی آرتین- ریس باشد و $f \in I$. در این‌صورت $I \bigcap (f) \subseteq I(f)$ و از آن‌جا که $f \in I \bigcap (f)$، پس $f \in (f)I$ و بنابراین $h \in I$ وجود دارد که $f = hf$؛ یعنی، I ناب است. در [۴، ۵ و ۶]، ایدآل‌های ناب حلقه‌ی $C(X)$ به‌صورت

$$O^A = \{f \in C(X) : A \subseteq int_{\beta X}\, \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$$

شناسایی شده‌اند که $A \subseteq \beta X$ بسته است. هر ایدآل آرتین- ریس دارای ویژگی آرتین- ریس است. در حقیقت، اگر فرض کنیم I یک ایدآل آرتین- ریس و J یک زیر ایدآل R باشد، آن‌گاه $I \bigcap J$ یک زیرایدآل I است و درنتیجه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $I^n \bigcap (I \bigcap J) \subseteq I(I \bigcap J)$. بنابراین $I^n \bigcap J \subseteq I(I \bigcap J) \subseteq IJ$؛ یعنی، I دارای ویژگی آرتین- ریس است. عکس این موضوع درست نیست؛ یعنی، هر ایدآل با ویژگی آرتین- ریس، لزوماً یک ایدآل آرتین- ریس نیست، برای مثال فرض می‌کنیم $X = (-\infty, ۰) \bigcup (۰, +\infty)$ و خودتوان $e \in C(X)$ را به‌صورت $e(x) = ۱$ برای $x > ۰$ و $e(x) = ۰$ برای $x < ۰$ تعریف می‌کنیم. ایدآل $I = (e)$ دارای ویژگی آرتین- ریس است، در واقع برای هر ایدآل J، داریم $(e) \bigcap J \subseteq (e)J$؛ زیرا اگر $g \in (e) \bigcap J$، آن‌گاه $g = fe \in J$ که $f \in C(X)$. در این‌صورت $g = e^۲ f = e(ef) \in (e)J$. اکنون نشان می‌دهیم I آرتین- ریس نیست. برای این منظور فرض می‌کنیم $g \in C(X)$ به گونه‌ای است که $Z(g) = (-\infty, ۱]$. آشکارا $M_g \subseteq I$ ، کافی است نشان دهیم M_g ویژگی آرتین- ریس ندارد. با استفاده از بحثی که پیش‌تر انجام دادیم، کافی است نشان دهیم M_g ناب نیست. در واقع اگر M_g ناب باشد، چون $g \in M_g$، پس $h \in M_g$ وجود دارد که $g = hg$ و این نشان می‌دهد که $Z(g) = (-\infty, ۱]$ باز است، ولی می‌دانیم که چنین نیست.

در گزاره‌ی ۱، نشان می‌دهیم که اگر هر ایدآل در $C(X)$ با ویژگی آرتین- ریس، یک ایدآل آرتین- ریس باشد آن‌گاه X یک Pـ فضا است.

عنصر a در یک حلقه، منظم گفته می‌شود هرگاه عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد که $a = a^۲ b$. در صورتی‌که هر عنصر یک حلقه منظم باشد، حلقه را منظم می‌گوییم. همچنین اگر هر عنصر یک ایدآل I منظم باشد، ایدآل را منظم می‌نامیم. آشکار است که هر ایدآل منظم، یک ایدآل ناب است ولی ایدآل های ناب لزوماً منظم نیستند، مثلاً اگر $x \in X$ و $O_x \neq M_x$ ، آن‌گاه ایدآل ناب O_x منظم نیست، $۴P$ را در [۷] ببینید.

۲ - Pـ فضاها و ویژگی آرتین‌ـ ریس در $C(X)$ و حلقه های خارج قسمتی آن

پیش‌تر یادآور شدیم که هر ایدآل ناب به‌صورت O^A است که A یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی βX می‌باشد. از سوی دیگر، یک ایدآل در $C(X)$ ناب است اگر و تنها اگر یک zـ ایدآل با ویژگی آرتین‌ـ ریس باشد. به این ترتیب اگر ایدآل ماکسیمال M_x دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس باشد، آن‌گاه M_x ناب است و در نتیجه $O_x = M_x$. با این حساب، برای اثبات گزاره‌ی زیر کافی است نشان دهیم "الف" و "چ" معادل هستند .

گزاره ۱: عبارت‌های زیر معادل‌اند:

الف- X یک Pـ فضا است.

ب- هر ایدآل در $C(X)$ ناب است.

پ- حلقه‌ی $C(X)$ یک حلقه آرتین‌ـ ریس است.

ت- هر zـ ایدآل در $C(X)$ دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس است.

ث- هر ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس است.

ج- هر ایدآل ماکسیمال ثابت در $C(X)$ دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس است.

چ- هر ایدآل با ویژگی آرتین‌ـ ریس در $C(X)$، یک اید آل آرتین- ریس است.

اثبات: مطابق آن‌چه پیش‌تر گفته شد، کافی است نشان دهیم "چ" و "الف" معادل هستند. اگر X یک Pـ فضا باشد، آشکارا هر ایدآل آرتین‌ـ ریس است. به عکس، فرض کنیم هر ایدآل با ویژگی آرتین-ریس، یک ایدآل آرتین‌ـ ریس باشد. $f \in C(X)$ را با فرض $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \emptyset$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $x \in X$ وجود دارد که $f \in O_x$. چون O_x ناب است، دارای ویژگی آرتین‌ـ ریس می‌باشد و در نتیجه یک ایدآل آرتین‌ـ ریس است. چون $M_f, (f) \subseteq O_x$، پس $M_f \bigcap (f) \subseteq M_f (f)$. از آن‌جا که $f \in M_f \bigcap (f)$، پس $g \in M_f$ و $h \in C(X)$ وجود دارند که $f = fgh$. از این‌رو $f(۱-gh) = ۰$ و این نشان می‌دهد که

$$Z(f) \bigcap Z(۱-gh) = \emptyset, \quad Z(f) \bigcup Z(۱-gh) = X .$$

بنابراین $Z(f)$ باز است. درصورتی که $\operatorname{int}_X Z(f) = \emptyset$، آن‌گاه $g \in C(X)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\operatorname{int}_X Z(g) \neq \emptyset$ و $Z(f) \bigcap Z(g) = \emptyset$. از آن‌جا که

$\operatorname{int}_X Z(fg)\neq\emptyset$، بنا به اثبات قبل، $Z(fg)$ باز است و چون $Z(f)\bigcap Z(g)=\emptyset$، پس $Z(f)$ نیز باز خواهد بود و درنتیجه X یک Pـ فضا می‌باشد. ■

برای هر $f\in C(X)$ به‌سادگی دیده می‌شود که (منبع [۲] را ببینید)

$$M_f=\{g\in C(X):Z(f)\subseteq Z(g)\}.$$

همچنین به‌سادگی ثابت می‌شود که ویژگی «آرتین- ریس» یک ویژگی جبری است به این معنا که این ویژگی تحت یکریختی‌ها پایا می‌ماند. اینک با توجه به این نکات به گزاره زیر می‌پردازیم .

گزاره ۲: اگر $f\in C(X)$، آن‌گاه عبارت‌های زیر معادل هستند:

الف- $C(X)/(f)$ یک حلقه ی آرتین- ریس است.

ب- $Z(f)$ یک Pـ فضا و زیر فضای باز X است.

پ - عنصر f و ایدآل $\operatorname{Ann}(f)$ هر دو منظم هستند.

ت- $C(X)/(f)$ حلقه‌ای منظم است.

ث- هر ایدآل M_g شامل f دارای ویژگی آرتین- ریس است.

اثبات: الف $\Leftarrow$ ب. فرض می‌کنیم $A=(f^{1/3})/(f)$ و $B=M_f/(f)$. بنا به فرض، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $A\bigcap B^n\subseteq AB$. ولی $B^n=B=M_f/(f)$ و $A\subseteq B$، از این‌رو

$$(f^{1/3})/(f)\subseteq((f^{1/3})/(f))(M_f/(f)).$$

به این ترتیب $f^{1/3}+(f)\in((f^{1/3})/(f))(M_f/(f))$؛ یعنی، برای هر $i=1,2,\ldots,k$، $g_i\in M_f$ و $h_i\in C(X)$ وجود دارند که $f^{1/3}-\sum_{i=1}^{k}g_if^{1/3}h_i\in(f)$. اگر قرار دهیم $\sum_{i=1}^{k}g_ih_i=l$، آن‌گاه $g\in C(X)$ وجود دارد که $f^{1/3}-f^{1/3}l=fg$ و یا $f^{1/3}(1-l-f^{2/3}g)=0$. دوباره اگر قرار دهیم $t=1-l-f^{2/3}g$، آن‌گاه داریم $Z(f)\bigcap Z(t)=\emptyset$ و $Z(f)\bigcup Z(t)=X$، زیرا $Z(f)\subseteq Z(l)$. از این‌رو نتیجه می‌گیریم که $Z(f)$ باز است. اکنون برای آن که نشان دهیم $Z(f)$ یک Pـ فضاست، تابع $\varphi:C(X)\to C(Z(f))$ را به‌صورت $\varphi(g)=g|_{Z(f)}$ برای هر $g\in C(X)$ تعریف می‌کنیم. آشکارا φ یک همریختی پوشا است، زیرا که $Z(f)$ باز و بسته است و درنتیجه Cـ نشانده می‌باشد. افزون براین

$$Ker(\varphi)=\{g\in C(X): g|_{Z(f)}=0\}=\{g\in C(X): Z(f)\subseteq Z(g)\}=(f)$$

چرا که $Z(f)$ باز است. به‌این ترتیب $C(X)/(f)\cong C(Z(f))$ و بنابراین $C(Z(f))$ آرتین- ریس است. اکنون بنا به گزاره ۱، $Z(f)$ یک P- فضا است .

ب $\Leftarrow$ پ. چون $Z(f)$ باز است، f منظم است؛ کافی است تابع g را این گونه تعریف کنیم که مقدار g روی $Z(f)$ برابر با صفر و مقدار آن روی $X\setminus Z(f)$ برابر با $\frac{1}{f}$ بگیریم. از آن‌جا که $Z(f)$ باز و بسته است، تابع g پیوسته است و $f=f^2g$. اکنون اگر نشان دهیم برای هر $g\in \mathrm{Ann}(f)$، صفر مجموعه‌ی $Z(g)$ باز است، مانند قبل، نشان داده‌ایم که g منظم می‌باشد. چون $gf=0$، پس $Z(f)\bigcup Z(g)=X$، درنتیجه $Z(f)\bigcup Z(g|_{X\setminus Z(f)})=X$. اکنون چون $Z(f)$ باز است، $Z(g|_{X\setminus Z(f)})$ نیز در X باز است. از سوی دیگر، چون $Z(f)$ یک P- فضا است، $Z(g|_{X\setminus Z(f)})$ در $Z(f)$ و در نتیجه در X باز می‌باشد. این نشان می‌دهد که $Z(g)=Z(g|_{Z(f)})\bigcup Z(g|_{X\setminus Z(f)})$ در X باز است.

پ $\Leftarrow$ب $\Leftarrow$ت $\Leftarrow$الف. چون f منظم است، پس $Z(f)$ باز است. در حقیقت، تابع $g\in C(X)$ وجود دارد که $f=f^2g$ و یا $f(1-fg)=0$. در نتیجه $Z(f)\bigcup Z(1-fg)=X$ و $Z(f)\bigcap Z(1-fg)=\varnothing$ و از این‌رو $Z(f)$ باز است. به‌این ترتیب $C(X)/(f)\cong C(Z(f))$. از سوی دیگر، هرگاه $g\in C(Z(f))$، تابع $g^*\in C(X)$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم که $g^*(x)=g(x)$ برای هر $x\in Z(f)$ و $g^*(x)=0$ برای هر $x\notin Z(f)$. آشکار است که $g^*\in \mathrm{Ann}(f)$، پس بنا به‌فرض، g^* منظم است و بنا به استدلالی که هم اکنون انجام شد، $Z(g^*)$ در X باز می‌باشد. ولی $Z(g)=Z(g^*)\bigcap Z(f)$ و این نشان می‌دهد که $Z(g)$ در $Z(f)$ باز است؛ یعنی، $Z(f)$ یک P- فضا است و "ب" برقرار می‌باشد. در صورتی‌که "ب" برقرار باشد، یکریختی $C(X)/(f)\cong C(Z(f))$ نتیجه می‌دهد $C(X)/(f)$ منظم است و بنابراین آرتین- ریس می‌باشد. آشکارا "ت" نیز "الف" را نتیجه می‌دهد.

ب $\Leftrightarrow$ ث. سرانجام نشان می‌دهیم قسمت‌های "ب" و "ث" معادل هستند. در صورتی‌که $Z(f)$ باز و یک P- فضا باشد و $f\in M_g$، آن‌گاه $Z(g)\subseteq Z(f)$ و درنتیجه $Z(g|_{Z(f)})=Z(g)$. از آن‌جا که $Z(f)$ یک P- فضا می‌باشد، $Z(g)$ باز است. اکنون نشان می‌دهیم ایدآل M_g دارای ویژگی آرتین- ریس است. برای این منظور، برای هر ایدآل I، ثابت می‌کنیم که $M_g\bigcap I\subseteq M_gI$. چون $Z(g)$ باز است، تابع t که برای $x\in Z(g)$ برابر با صفر و برای $x\notin Z(g)$ برابر با ۱ تعریف می‌شود، پیوسته است و

$g = tg$. حال اگر $i \in M_g \bigcap I$، آن‌گاه $Z(g) \subseteq Z(i)$. افزون بر این، چون $Z(g)$ باز است، بنا به ۱D در [۷]، i ضریبی از g است و از این‌رو $i = hg = htg$ که $h \in C(X)$. به این ترتیب $i = (t)(hg) \in M_g I$. به‌عکس، فرض می‌کنیم هر ایدآل M_g شامل f دارای ویژگی آرتین- ریس است، به این ترتیب M_f دارای ویژگی آرتین- ریس است و در- نتیجه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $M_f^n \bigcap (f) \subseteq M_f I$. ولی از آن‌جا که M_f یک z- ایدآل است، پس نیم- اول می‌باشد و از این‌رو $(f) = M_f \bigcap (f) \subseteq M_f(f)$. در نتیجه $h \in M_f$ وجود دارد که $f = hf$ و یا $f(1-h) = 0$. این نشان می‌دهد که $Z(f) \bigcup Z(1-h) = X$ و $Z(f) \bigcap Z(1-h) = \varnothing$ و بنابراین $Z(f)$ باز است. اکنون فرض کنیم $g \in C(Z(f))$. چون $Z(f)$ باز است، پس $g^* \in C(X)$ وجود دارد که $g^*(Z(f)) = g$ و $g^*(X \setminus Z(f)) = \{1\}$. از آن‌جا که $Z(g) = Z(g^*) \subseteq Z(f)$، پس $f \in M_{g^*}$ و بنا به- فرض، M_{g^*} دارای ویژگی آرتین- ریس است. به‌این ترتیب مشابه فرایند بالا، نتیجه می‌شود که $Z(g^*)$ باز است؛ یعنی، $Z(f)$ یک P- فضا است. ■

یک ایدآل در یک حلقه؛ اساسی نامیده می‌شود هرگاه هر ایدآل نا صفر در حلقه را به‌طور نابدیهی قطع کند. یک ایدآل را یکنواخت می‌گوییم اگر هر دو زیر ایدآل ناصفر آن همدیگر را به‌طور نابدیهی قطع کنند. ایدآل‌های اساسی و یکنواخت حلقه‌ی $C(X)$ در [۳] شناسایی و ثابت شده است که ایدآل‌های یکنواخت و مینیمال در $C(X)$ یکسانند. ساکل یک حلقه عبارت است از اشتراک همه‌ی ایدآل‌های اساسی و یا مجموع همه‌ی ایدآل‌های مینیمال حلقه. ساکل $C(X)$ را با نماد $C_F(X)$ نمایش می‌دهیم و در [۹] به‌صورت

$$C_F(X) = \{f \in C(X) : \text{متناهی باشد } X \setminus Z(f)\}$$

شناسایی شده است. ایدآل‌های مینیمال حلقه‌ی $C(X)$ نیز در همین مرجع به‌صورت توپولوژیکی شناسایی شده‌اند. قضیه زیر P- فضاها را برحسب ویژگی آرتین- ریس برخی از ایدآل‌های $C(X)$ و بعضی از حلقه‌های خارج قسمتی دیگر $C(X)$ شناسایی می‌کند.

قضیه۳: گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف – X یک P- فضا است.

ب – برای هر $f \in C(X)$، حلقه‌ی $C(X)/(f)$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است.

پ – $C(X)/C_F(X)$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است.

ت – برای هر ایدآل اول P در $C(X)$، حلقه‌ی $C(X)/P$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است.

ث – حلقه‌ی $C(X)$ دارای یک ایدآل ماکسیمال آرتین- ریس است.

ج – $C(X)$ دارای یک ایدآل ماکسیمال منظم است.

چ – یک ایدآل اصلی منظم (f) در $C(X)$ وجود دارد به گونه‌ای $C(X)/(f)$ یک حلقه-ی آرتین- ریس باشد.

ح- هر ایدآل اول مینیمال در $C(X)$ یک ایدآل منظم است.

خ- هر ایدآل اول مینیمال در $C(X)$ یک ایدآل آرتین- ریس است.

اثبات: با استفاده از گزاره‌ی ۲، قسمت‌های "الف" و "ب" معادل هستند. در صورتی‌که X یک P- فضا باشد، آن‌گاه بنا به گزاره‌ی ۱، حلقه‌ی $C(X)$ یک حلقه ی آرتین- ریس است و درنتیجه $C(X)/C_F(X)$ نیز چنین است؛ یعنی، گزاره‌ی "الف"، گزاره‌ی "پ" را نتیجه می-دهد. همچنین گزاره‌ی "الف"، گزاره‌ی "ت" را نتیجه می‌دهد. در واقع اگر X یک P- فضا باشد، آن‌گاه هر ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال است، ۴P در [۷] را ببینید. اکنون $C(X)/P$ برای هر ایدآل اول P، میدان است و در نتیجه گزاره‌ی "ت" آشکار است. گزاره‌ی "الف" همچنین نتیجه می‌دهد که هر ایدآل اول در $C(X)$ منظم است و از این رو گزاره‌های "ث"، "ج"، "چ"، "ح" و "خ" هم نتیجه می‌شوند. آن‌چه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم گزاره‌های "پ"، "ت"، "ج"، "چ"، "ح" و "خ" گزاره‌ی "الف" را نتیجه می‌دهند.

پ $\Leftarrow$الف. چون $C(X)/C_F(X)$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است، برای هر $f\in C(X)$، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\frac{(f)+C_F(X)}{C_F(X)}\bigcap\left(\frac{M_f+C_F(X)}{C_F(X)}\right)^n\subseteq\frac{(f)+C_F(X)}{C_F(X)}\frac{M_f+C_F(X)}{C_F(X)}$$

ولی چون $C_F(X)$ یک z- ایدآل است، پس

$$\frac{(f)+C_F(X)}{C_F(X)}\subseteq\frac{M_f+C_F(X)}{C_F(X)}=\left(\frac{M_f+C_F(X)}{C_F(X)}\right)^n$$

از این‌رو:

$$\frac{(f)+C_F(X)}{C_F(X)}\subseteq\frac{(f)+C_F(X)}{C_F(X)}\frac{M_f+C_F(X)}{C_F(X)}.$$

این نشان می‌دهد که $g\in M_f$ وجود دارد که $f(۱-g)=f-fg\in C_F(X)$. به این ترتیب $(X\setminus Z(f))\bigcap(X\setminus Z(۱-g))$ مجموعه‌ای متناهی از نقاط منفرد X مثلاً $\{x_۱,x_۲,\dots,x_k\}$ می‌باشد. پس $Z(f)\bigcup Z(۱-g)=X\setminus\{x_۱,x_۲,\dots,x_k\}$ و

$Z(f)\bigcap Z(1-g)=\varnothing$، زیرا $Z(f)\subseteq Z(g)$. اگر قرار دهیم $Y=X\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$، آن‌گاه $Z(f)$ در Y باز است و بنابراین در X هم باز می‌باشد چرا که Y در X باز است. از این‌رو X یک Pـ فضا است.

ت $\Leftarrow$الف. نشان می‌دهیم هر ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال است . فرض می‌کنیم P یک ایدآل اول در $C(X)$ و M ایدآل ماکسیمال یکتای شامل P باشد. اگر $P\neq M$، آن‌گاه $f\in M\setminus P$ وجود دارد. چون $C(X)/P$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که

$$\frac{(f)+P}{P}\bigcap\left(\frac{M_F+P}{P}\right)^n\subseteq\frac{(f)+P}{P}\frac{M_F+P}{P}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{(f)+P}{P}\subseteq\frac{(f)+P}{P}\frac{M_f+P}{P}$$

و از این‌رو $g\in M_f$ وجود دارد که $f-fg=f(1-g)\in P$. از آن‌جا که $f\notin P$، پس $1-g\in P\subseteq M$. اما $Z(f)\bigcap Z(1-g)=\varnothing$ و $f\in M$ نتیجه می‌دهند $1-g\notin M$ که البته یک تناقض است.

ث $\Leftarrow$الف. فرض کنیم M یک ایدآل ماکسیمال آرتین- ریس در حلقه‌ی $C(X)$ باشد و $f\in M$، پس $M_f\subseteq M$ و $(f)\bigcap M_f^n\subseteq(f)M$، لذا

$$f\in(f)\bigcap M_f^n=(f)\bigcap M_f\subseteq(f)M$$

و از این‌رو $g\in C(X)$ و $k\in M_f$ وجود دارند که $f=fgk$. بنابراین $f(1-kg)=0$، درنتیجه $Z(f)$ باز است؛ یعنی، f منظم است. حال اگر $f\notin M$ ، پس $g\in M$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $Z(f)\bigcap Z(g)=\varnothing$. اما $fg\in M$ و درنتیجه $M_{fg}\subseteq M$ و بنابراین $(fg)\bigcap M_{fg}^n\subseteq(fg)M_{fg}$ و مشابه روش پیشین، $Z(fg)$ باز است. اما $Z(fg)=Z(f)\bigcup Z(g)$ و $Z(f)\bigcap Z(g)=\varnothing$، درنتیجه $Z(f)$ باز است. به‌این ترتیب، در این حالت هم f منظم است. پس X یک Pـ فضا است.

ج $\Leftarrow$الف. فرض کنیم M یک ایدآل ماکسیمال منظم باشد و $f\notin M$، از این‌رو $g\in M$ وجود دارد که $Z(f)\bigcap Z(g)=\varnothing$. چون $fg\in M$ و M منظم است، پس $Z(fg)=Z(f)\bigcup Z(g)$ و $Z(g)$ باز می‌باشند. به این ترتیب $(Z(f)\bigcup Z(g))\setminus Z(g)=Z(f)$ هم باز می‌باشد و در نتیجه X یک Pـ فضا است.

چ $\Leftarrow$الف. از آن‌جا که $C(X)/(f)$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است، بنابه گزاره‌ی ۲، $Z(f)$ یک P- فضای باز می‌باشد. اینک اگر فرض کنیم $g \in C(X)$، آن‌گاه صفر مجموعه‌ی $Z(g|_{Z(f)})$ در $Z(f)$ باز است و در نتیجه در X هم باز می‌باشد. از سوی دیگر $fg \in (f)$ هم نتیجه می‌دهد $Z(fg) = Z(f) \bigcup Z(g)$ در X باز است، زیرا (f) منظم می‌باشد. اما

$$Z(f) \bigcup Z(g) = Z(f) \bigcup Z(g|_{X \setminus Z(f)}).$$

بنابراین $Z(f) \bigcup Z(g|_{X \setminus Z(f)})$ هم در X باز است. چون

$$Z(f) \bigcap Z(g|_{X \setminus Z(f)}) = \varnothing$$

از این‌رو $Z(g|_{X \setminus Z(f)})$ نیز در X باز می‌باشد. به این‌ترتیب

$$Z(g) = Z(g|_{Z(f)}) \bigcup Z(g|_{X \setminus Z(f)})$$

هم در X باز است؛ یعنی، X یک P- فضاست .

ح $\Leftarrow$الف. فرض کنیم $f \in C(X)$ و $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \varnothing$، از این‌رو ایدآل اول مینیمال P وجود دارد که $f \in P$. پس $Z(f)$ باز است چرا که P منظم است. اکنون فرض می‌کنیم $\operatorname{int}_X Z(f) = \varnothing$ و $y \notin Z(f)$. تابع $g \in C(X)$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم که $g(Z(f)) = \{1\}$ و $y \in \operatorname{int}_X Z(g)$. از آن‌جا که $\operatorname{int}_X Z(g) \neq \varnothing$، پس fg متعلق به یک ایدآل اول مینیمال می‌باشد و درنتیجه $Z(fg)$ باز است. اما $Z(f) \bigcap Z(g) = \varnothing$ نتیجه می‌دهد $Z(f)$ باز می‌باشد و بنابراین X یک P- فضا است .

خ $\Leftarrow$الف. مانند اثبات قبل، برای هر $f \in C(X)$ با شرط $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \varnothing$ کافی است نشان دهیم $Z(f)$ باز است. پس با این فرض، ایدآل اول مینیمال P وجود دارد که $f \in P$. چون P یک z- ایدآل می‌باشد، از این‌رو $M_f \subseteq P$. اکنون چون P یک ایدآل آرتین- ریس است، پس $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$(f) = M_f \bigcap (f) = M_f^n \bigcap (f) \subseteq M_f (f).$$

به‌این ترتیب $g \in M_f$ وجود دارد که $f = gf$ و این نشان می‌دهد $Z(f)$ باز است. ■

نکته ۴: در قضیه‌ی بالا، وجود یک ایدآل ماکسیمال منظم و یا وجود یک ایدآل ماکسیمال با ویژگی آرتین- ریس باعث می‌شود که X یک P- فضا شود. نشان می‌دهیم که ماکسیمال بودن ایدآل در این قضیه اهمیت دارد. در واقع نشان می‌دهیم اگر $C(X)$ دارای یک z-

ایدآل منظم و یا دارای یک ایدآل اول منظم باشد، فضای X لزوماً Pـ فضا نیست. برای این منظور کافی است فضای

$$X = \{۰, ۱, ۱/۲, \ldots, ۱/n, \ldots\}$$

را به‌عنوان زیرفضایی از اعداد حقیقی در نظر بگیریم. در این حالت آشکار است که $O_۰$ ایدآلی منظم در $C(X)$ می‌باشد. ولی X یک Pـ فضا نیست چرا که X یک فضای فشرده‌ی نامتناهی است ([۷] را ببینید). برای مثالی دیگر فضای Σ در تمرین $۴M$، منبع [۷] را در نظر می‌گیریم. در $C(\Sigma)$، zـ ایدآل اول O_σ منظم است؛ زیرا اگر $f \in O_\sigma$، آن‌گاه $\sigma \in \mathrm{int}_X Z(f)$ و از این‌رو بنا به $۴M$ در [۷]، $Z(f)$ باز است؛ یعنی، O_σ منظم می‌باشد. بنابه همین تمرین، Σ یک Pـ فضا نیست.

۳- Pـ فضاها و ویژگی آرتین- ریس در حلقه‌های موضعی و حلقه‌های کسرهای $C(X)$

یادآوری می‌کنیم که اگر S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد، آن‌گاه $S^{-۱}R = \left\{\frac{r}{s} : r \in R,\ s \in S\right\}$ با این ویژگی که برای هر $a,b \in R$ و هر $s,t \in S$، داشته باشیم $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ اگر و تنها اگر $u \in S$ وجود داشته باشد که $u(at - bs) = ۰$. $S^{-۱}R$ با دو عمل جمع و ضرب به‌صورت

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}, \quad \forall a,b \in R,\ \forall s,t \in S$$

تشکیل یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر می‌دهد که آن را حلقه‌ی کسرهای R می‌نامیم. در حالت خاص، اگر R یک حلقه، $a \in R$ و $S = \left\{a^n : n = ۰, ۱, ۲, \ldots\right\}$، آن‌گاه $S^{-۱}R$ را به‌اختصار به‌صورت R_a نمایش می‌دهیم. وقتی P یک ایدآل اول در حلقه‌ی R باشد و $S = R \setminus P$، آن‌گاه $S^{-1}R$ را با نماد R_P نمایش می‌دهیم و آن را حلقه‌ی موضعی شده‌ی R می‌نامیم. سرانجام اگر $S_۰$ متشکل از همه‌ی عناصر غیر مقسوم علیه صفر R باشد، آشکارا $S_۰$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است و در این حالت، $S_۰^{-۱}R$ را با $T(R)$ نشان دهیم و آن را حلقه‌ی کسرهای کامل R می‌نامیم. نتیجه‌ی زیر نشان می‌دهد که اگر P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد، آن گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که $C(X)_P$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس باشد این است که P اول مینیمال باشد.

گزاره ۵: اگر P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف – $C(X)_P$ یک حلقه‌ی منظم است.

ب - $C(X)_P$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است.

پ- P مینیمال است.

اثبات: الف ⇔پ. اگر P مینیمال باشد، آن‌گاه برای هر $f\in P$، عنصر $u\in C(X)\setminus P=S$ وجود دارد که $uf=0$. اینک برای هر $g\in C(X)$ و هر $s,s'\in S$، داریم $fu(s^2s'-sfg)=0$؛ یعنی، $\frac{f}{s}=\frac{f^2}{s^2}\frac{g}{s'}$، بنابراین $C(X)_P$ یک حلقه‌ی منظم است. به‌عکس، فرض کنیم $C(X)_P$ یک حلقه‌ی منظم باشد و $f\in P$. پس $g\in C(X)$ و $s\in S=C(X)\setminus P$ وجود دارند که $\frac{f}{1}=\frac{f^2}{1}\frac{g}{s}$. از این‌رو $u\in S=C(X)\setminus P$ وجود دارد که $u(sf-f^2g)=0$. پس $uf(s-fg)=0$ و $u(s-fg)\notin P$، بنابراین P مینیمال است.

ب ⇔پ. وقتی P مینیمال باشد، آن‌گاه $C(X)_P$ یک حلقه‌ی منظم است و از این‌رو آرتین- ریس می‌باشد؛ یعنی، گزاره‌ی پ، گزاره‌ی "ب" را نتیجه می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم "ب" برقرار است و $f\in P$. در این‌صورت $n\in\mathbb{N}$ موجود است که $(\frac{f}{1})\bigcap M^n\subseteq(\frac{f}{1})M$ که در آن M ایدآل ماکسیمال یکتای $C(X)_P$ است (یعنی، $M=\{\frac{f}{s}:f\in P,\ s\notin P\}$). به‌این‌ترتیب $(\frac{f}{1})\subseteq(\frac{f}{1})M$ و در نتیجه $g\in P$ و $s\notin P$ وجود دارند که $\frac{f}{1}=\frac{f}{1}\frac{g}{s}$. اکنون $u\notin P$ وجود دارد که $u(sf-fg)=0$؛ یعنی، $uf(s-g)=0$. این نشان می‌دهد که P مینیمال است، چرا که $u(s-g)\notin P$. ■

از آن‌جا که Pـ فضا بودن X معادل با این است که ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی $C(X)$ مینیمال باشند، اثبات نتیجه‌ی زیر با استفاده از گزاره‌ی ۵ آشکار است. در این‌جا، برای هر $x\in X$، مجموعه‌ی ضربی $C(X)\setminus M_x=\{f\in C(X):f(x)\neq 0\}$ را با S_x نشان می‌دهیم.

نتیجه ۶ : گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف – X یک P- فضا است.

ب – برای هر $x\in X$، حلقه‌ی $S_x^{-1}C(X)$ منظم است .

پ – برای هر $x\in X$، حلقه‌ی $S_x^{-1}C(X)$ آرتین- ریس است.

ت – برای هر ایدآل اول P، حلقه‌ی $C(X)_P$ منظم است.

ث – برای هر ایدآل اول P، حلقه‌ی $C(X)_P$ آرتین- ریس است.

گزاره : عبارت های زیر معادل هستند.

الف – $T(C(X))$ یک حلقه‌ی منظم است.

ب – $T(C(X))$ یک حلقه‌ی آرتین- ریس است.

پ – فضای ایدآل‌های اول مینیمال $C(X)$ فشرده است.

اثبات: گزاره‌های "الف" آشکارا قسمت ب را نتیجه می‌دهد. فرض کنیم "ب" برقرار و $f \in C(X)$ به‌گونه‌ای باشد که $\operatorname{int}_X Z(f) \neq \varnothing$. پس بنا به "ب"، عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\frac{f}{1}) \bigcap (S_\circ^{-1} M_f)^n \subseteq (\frac{f}{1}) S_\circ^{-1} M_f$ و به‌این ترتیب $(\frac{f}{1}) \bigcap \subseteq (\frac{f}{1}) S_\circ^{-1} M_f$. از این‌رو $g \in M_f$ و $s \in S_\circ$ وجود دارند که $\frac{f}{1} = \frac{f}{1} \frac{g}{s}$. این نشان می‌دهد که $tf(s-g) = \circ$ که در آن $t \in S_\circ$ و از این‌رو $f(s-g) = \circ$، چرا که t مقسوم‌علیه صفر نیست. از آن‌جا که $Z(f) \subseteq Z(g)$ و $Z(f) \bigcap Z(s-g) \subseteq Z(s)$، بنابراین

$$\operatorname{int}_X Z(f) \bigcap \operatorname{int}_X Z(s-g) \subseteq \operatorname{int}_X Z(s) = \varnothing .$$

از سوی دیگر $Z(f) \bigcup Z(s-g) = X$ و بنابه نتیجه ۵.۵ در[۸]، فضای ایدآل‌های اول مینیمال $C(X)$ فشرده است. (اگر $\operatorname{int}_X Z(f) = \varnothing$، آن‌گاه تابع ثابت $h = \circ$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت نیز داریم $\operatorname{int}_X Z(f) \bigcap \operatorname{int}_X Z(h) = \varnothing$ و $Z(f) \bigcup Z(h) = X$)، از این‌رو گزاره‌ی "ب"، گزاره‌ی "پ" را نتیجه می‌دهد. برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم قسمت "پ"، هم "الف" را نتیجه می‌دهد. پس اگر "پ" برقرار باشد، بنابه نتیجه‌ی ۵.۵ در [۸]، برای هر $f \in C(X)$، تابع $g \in C(X)$ وجود دارد که $Z(f) \bigcup Z(g) = X$ و $\operatorname{int}_X Z(f) \bigcap \operatorname{int}_X Z(g) = \varnothing$. توجه داریم که چون $Z(f) \bigcup Z(g) = X$، آن‌گاه $Z(f) \bigcap Z(g) = Z(f+g)$، زیرا برای $x \in X$، اگر $f(x) + g(x) = \circ$ و $f(x) \neq \circ$، آن‌گاه $g(x) \neq \circ$ که با $fg = \circ$ تناقض دارد. به‌این-ترتیب برای هر $f \in C(X)$، تابع $g \in C(X)$ وجود دارد که $fg = \circ$ و $f+g$ مقسوم-علیه صفر نیست. اکنون بنابه قضیه‌ی ۳.۲ در [۱]، $T(C(X))$ منظم است. ■

با روشی مشابه، می‌توان نشان داد که اگر $f \in C(X)$ مقسوم‌علیه صفر نباشد و $C(X)_f$ منظم باشد، آن‌گاه باز هم فضای ایدآل‌های اولِ مینیمال $C(X)$ فشرده است. ولی منظم

بودن حلقه‌ی $C(X)_f$ وقتی $f \in C(X)$ مقسوم علیه صفر نیست و $X \setminus Z(f)$ در X یک C ـ نشانده باشد، معادل با این است که $X \setminus Z(f)$ یک P ـ فضا باشد.

قضیه ۸: فرض می‌کنیم $f \in C(X)$ و $X \setminus Z(f)$ در X یک $C-$ نشانده‌ی چگال باشد. در این‌صورت $C(X)_f$ منظم است اگر و تنها اگر $X \setminus Z(f)$ یک Pـ فضا باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $C(X)_f$ منظم است و $g \in C(X \setminus Z(f))$. ازآن‌جا که $X \setminus Z(f)$ یک C- نشانده است، تابع $g^* \in C(X)$ وجود دارد که $g^* |_{X \setminus Z(f)} = g$. با استفاده از این که $C(X)_f$ منظم است، تابع $h \in C(X)$ و عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $\frac{g^*}{۱} = \frac{g^{*۲}}{۱}\frac{h}{f^n}$. این نشان می‌دهد که برای یک عدد $m \in \mathbb{N}$، داریم $g^* f^m (f^n - g^* h) = ۰$ و از این‌رو

$$g(f^n |_{X \setminus Z(f)} - gh |_{X \setminus Z(f)}) = ۰ .$$

پس

$$Z(g) \bigcup Z(f^n |_{X \setminus Z(f)} - gh |_{X \setminus Z(f)}) = X \setminus Z(f)$$

$$Z(g) \bigcap Z(f^n |_{X \setminus Z(f)} - gh |_{X \setminus Z(f)}) = \varnothing$$

که نشان می‌دهد $Z(g)$ در $X \setminus Z(f)$ باز است؛ یعنی، $X \setminus Z(f)$ یک Pـ فضا است. به‌عکس، فرض می‌کنیم $X \setminus Z(f)$ یک Pـ فضا است و $g \in C(X)$. به‌این‌ترتیب $C(X \setminus Z(f))$ منظم است و درنتیجه $h \in C(X \setminus Z(f))$ وجود دارد که $g |_{X \setminus Z(f)} = g^۲ |_{X \setminus Z(f)} h$. از آن‌جا که $X \setminus Z(f)$ یک C- نشانده است، تابع $h^* \in C(X)$ وجود دارد به‌طوری که $h^* |_{X \setminus Z(f)} = h$. بنابراین روی $X \setminus Z(f)$ داریم $g - g^۲ h^* = ۰$ ولی $X \setminus Z(f)$ در X چگال است، پس همواره $g - g^۲ h^* = ۰$ که نتیجه می‌دهد $C(X)$ منظم است، از این‌رو $C(X)_f$ منظم می‌باشد.

نتیجه ۹: فرض کنیم $f \in C(X)$، در این‌صورت X یک Pـ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)_f$ و $C(X)/(f)$ هردو منظم باشند.

اثبات: اگر X یک Pـ فضا باشد، آن‌گاه $Z(f)$ یک Pـ فضای باز است و در نتیجه بنابه گزاره‌ی ۲، $C(X)/(f)$ منظم می‌باشد. از سوی دیگر، چون $C(X)$ منظم است، از این‌رو $C(X)_f$ نیز منظم است. به‌عکس، هرگاه $C(X)/(f)$ منظم باشد، آن‌گاه بنابه گزاره‌ی ۲،

$Z(f)$ یک P- فضای باز است. به‌این‌ترتیب $X \setminus Z(f)$ یک C ـ نشانده است و با استفاده از قسمت اول اثبات در قضیه‌ی ۸، $X \setminus Z(f)$ نیز یک Pـ فضا است. بنابراین $X = Z(f) \cup (X \setminus Z(f))$ نیز یک Pـ فضا می‌باشد.

مراجع

[1] Anderson, D.F. and ayman badawi (2002), Divisibility conditions in commutative rings with zero divisors, *Communications in Algebra*, **3**(8), 4031-4047.

[2] Azarpanah, F. and Mohamadian, R. (2007), $\sqrt{z}$-ideals and $\sqrt{z^0}$-ideals in C(X), *Acta Mathematica Sinica*. **23**(6), 989-996.

[3] Azarpanah, F. (1995), Essential ideals in C(X), *Periodica Mathematica Hungarica,* **31**(2), 105-112.

[4] Bkouche, R. (1970), Purete mosllesse et paracompacite, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser*. A **270**, A1653-1655.

[5] Brookshear, J.G. (1977), Projective ideals in rings of continuous functions, *Pacific Journal of Mathematics*, **71**, 574-576

[6] DeMarco, G. (1978), Projectivity of pure ideals, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **68**, 289-304.

[7] Gillman, L. and Jerison, M. (1976), *Rings of continuous functions*, Springer, New York.

[8] Henriksen, M. and Jerison, M. (1965), The space of minimal prime ideals of commutative rings, *Transactions of the* American *Mathematical* Society, **115**, 110-130.

[9] Karamzadeh, O.A.S and Rostami, M. (1985), On intrinsic topology and some related ideals of C(X)*, Proceedings of the American Mathematical Society,* **93,** 179-184.

P-spaces and Artin-Rees Property

Fariborze Azarpanah, Soosan Afrooz

Department of Mathematics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

In this article, we study the Artin-Rees property in $C(X)$, in the rings of fractions of $C(X)$ and in the factor rings of $C(X)$. We show that $C(X)/(f)$ is an Artin-Rees ring if and only if $Z(f)$ is an open P-space. A necessary and sufficient condition for the local rings of $C(X)$ to be Artin-Rees rings is that each prime ideal in $C(X)$ becomes minimal and it turns out that every local ring of $C(X)$ is an Artin-Rees ring if and only if X is a P-space. Finally we have shown that whenever $X \setminus Z(f)$ is dense C-embedded in X, then $C(X)_f$ is regular if and only if $X \setminus Z(f)$ is a P-space.

***Keywords*:** Artin-Rees property, P-space, rings of fractions of $C(X)$, local rings of $C(X)$, C-embedded, regular.

Mathematics Subject Classification (2000): 54C40, 13A30.