

مکانیک سیالات ۲



فصل اول

حل تقریبی معادلات ناویر-استوکس

احمد شاپیونر

سرفصل مطالب

1. مقدمه
2. بی بعد سازی معادلات حرکت
3. جریان خزشی
4. جریان غیر لزج
5. جریان غیر چرخشی (جریان پتانسیل)
6. تقریب لایه مرزی

۱- مقدمه

- هدف در مسائل مکانیک سیالات به دست آوردن توزیع سرعت و فشار در تمام نقاط محدوده جریان و در تمام زمانها است.
- معادلات دیفرانسیل حرکت سیال :
 - ✓ بقای جرم (معادله پیوستگی)
 - ✓ قانون دوم نیوتن (معادله ناویر-استوکس)
- با حل این معادلات در تمام محدوده جریان مشخصات جریان مانند میدان سرعت و فشار به دست می آید.

$$V = V(x, y, z, t) \quad P = P(x, y, z, t)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \quad \text{معادله ناویر-استوکس}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

معادله پیوستگی



معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس سنگ بنای مکانیک سیالات است.

- متاسفانه حل تحلیلی معادلات دیفرانسیلی ناویر-استوکس برای سیال نیوتنی در بسیاری از مسائل کاربردی مکانیک سیالات امکانپذیر نیست.
- برای حل این معادلات دو روش کلی وجود دارد:

1. حل تقریبی

2. استفاده از روشهای عددی (CFD)

در معادلات حرکت سیال نیروهای فشاری، اینرسی و لزجت وجود دارد. با توجه به نوع مسئله ممکن است بزرگی یکی از این نیروها در برابر دیگر نیروها قابل صرفنظر باشد.

✓ حل دقیق:

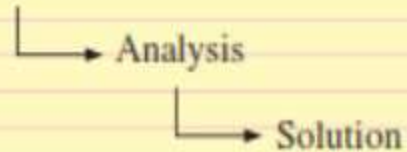
به دست آمده از حل معادلات کامل ناویر-استوکس

✓ حل تقریبی:

به دست آمده از حل معادلات ساده شده ناویر-استوکس

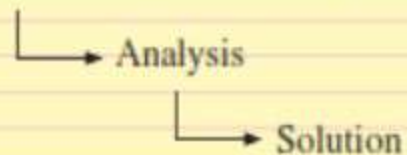
“Exact” solution

Full Navier-Stokes equation

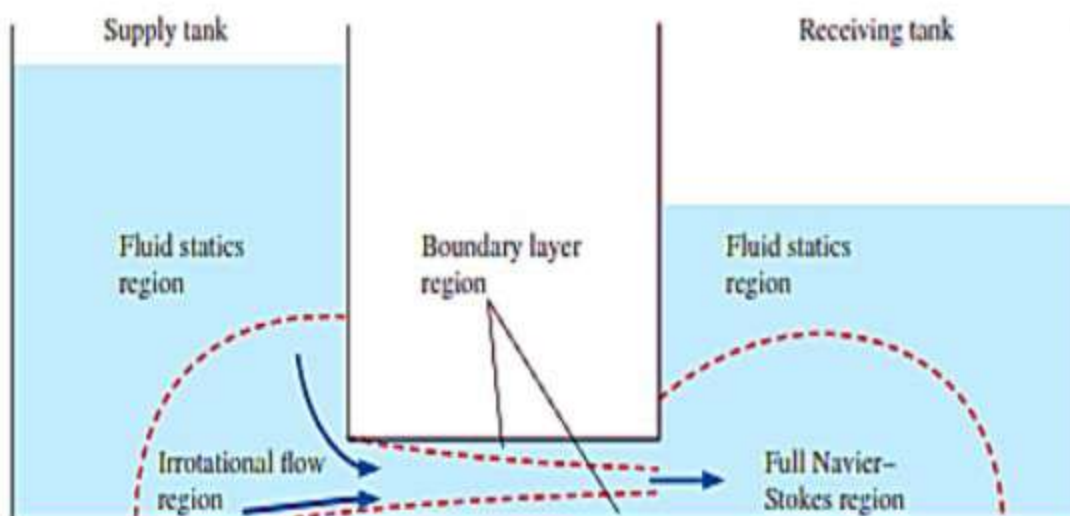


Approximate solution

Simplified Navier-Stokes equation



- در بخشهای بالایی مخازن فرض سیال ساکن معتبر است.
- در ورودی لوله اتصال فرض جریان غیرچرخشی معتبر است.
- در نزدیکی دیواره ها فرض جریان لایه مرزی معتبر است.
- در خروجی لوله اتصال هیچ فرضی معتبر نیست و باید معادلات کامل ناویر-استوکس در نظر گرفته شود.



ممکن است در یک مسئله در بخشی از محدوده یک فرض معتبر باشد و در بخش دیگر نباشد.

سوال: چگونه تعیین می کنیم که یک فرض برای مسئله مورد نظر معتبر است؟

- با مقایسه بزرگی دامنه ترم های مختلف در معادله حرکت و اینکه کدام از ترم ها در مقایسه با بقیه قابل صرف نظر است.

سوال: روش مناسب برای مقایسه ترم های معادلات ناویر استوکس چیست؟

- بی بعد سازی معادلات

۲- بی بعد سازی معادلات حرکت

- روشی متداول برای مقایسه مناسب مرتبه بزرگی ترم های معادله حرکت
- پارامترهای مقیاس

Scaling Parameter	Description	Primary Dimensions
L	Characteristic length	$\{L\}$
V	Characteristic speed	$\{Lt^{-1}\}$
f	Characteristic frequency	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Reference pressure difference	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Gravitational acceleration	$\{Lt^{-2}\}$

- متغیرهای و اپراتورهای بی بعد

$$\begin{aligned}
 t^* &= ft & \vec{x}^* &= \frac{\vec{x}}{L} & \vec{V}^* &= \frac{\vec{V}}{V} \\
 P^* &= \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} & \vec{g}^* &= \frac{\vec{g}}{g} & \vec{\nabla}^* &= L\vec{\nabla}
 \end{aligned}$$

- با جایگزینی پارامترها و اپراتورهای بدون بعد در معادلات حرکت فرم بدون بعد معادلات به دست می آید.

- معادله بدون بعد پیوستگی (برای جریان تراکم ناپذیر)

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0$$

- معادله بدون بعد ناویر استوکس

$$\left[\frac{fL}{V} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^* \right) \vec{V}^* = - \left[\frac{P_0 - P_\infty}{\rho V^2} \right] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{gL}{V^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{\mu}{\rho VL} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

تمرین ۱

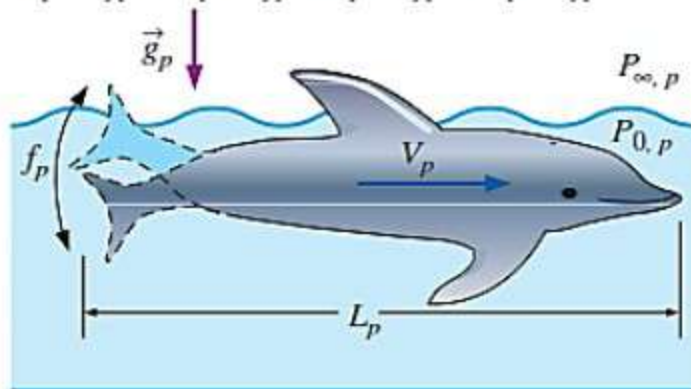
• فحرم بدون بعد معادلات حرکت را استخراج کنید.

هر کدام از ترم های داخل براکت در معادله بدون بعد ناویر استوکس یک گروه بدون بعد شناخته شده است.

$$[St] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Fr^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

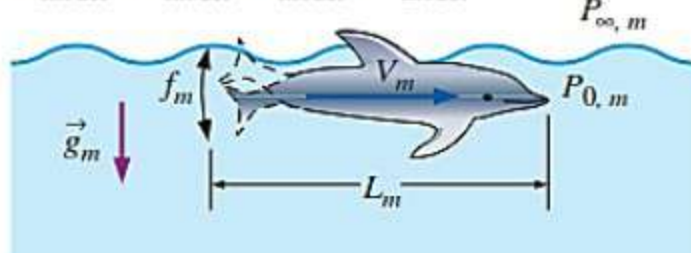
Prototype

$St_{prototype}, Eu_{prototype}, Fr_{prototype}, Re_{prototype}$



Model

$St_{model}, Eu_{model}, Fr_{model}, Re_{model}$



برای تشابه دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی باید بین آنها تشابه هندسی وجود داشته باشد و چهار عدد بدون بعد فرود، رینولدز، استروهل و اولر بین آنها برابر باشد.

۳- جریان خزشی

$$Re = \frac{\text{نیروهای اینرسی}}{\text{نیروهای لزجت}}$$

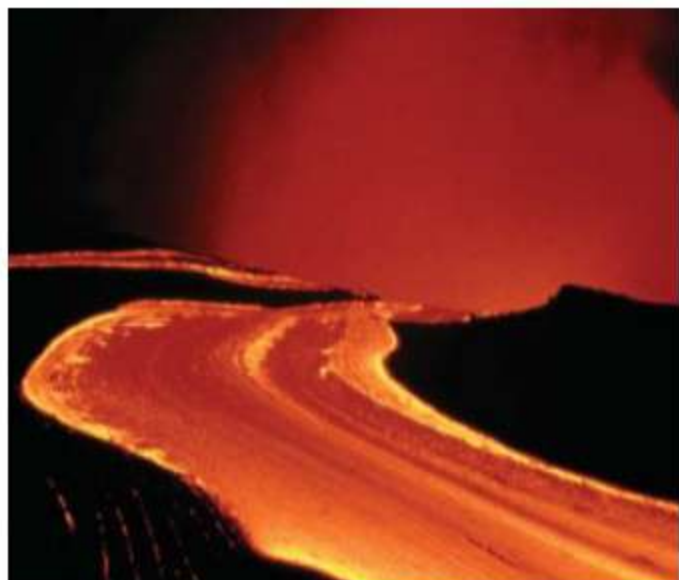
- اگر در جریانی نیروهای اینرسی در مقایسه با نیروهای لزجت بسیار کوچک باشند جریان حاصل را **جریان خزشی**، **استوکس و** یا **رینولدز پایین** نامیده می شود.
- عدد رینولدز در این گونه جریان ها کوچک تر از یک خواهد بود.
- شرایط وقوع جریان خزشی:

$$Re \ll 1$$

یا ترکیبی از
این شرایط

- ✓ سرعت پایین جریان
- ✓ چگالی پایین سیال
- ✓ طول مشخصه بسیار کوچک سیستم
- ✓ لزجت بالای سیال

- چنین رژیم جریانی نخستین بار به منظور تشریح نظریه روان کاری (روغن کاری) به کار رفت.
- از جمله پدیده‌های طبیعی که چنین رژیم جریانی در آن‌ها غالب است می‌توان به حرکت **میکروارگانیزم‌ها** و اسپرم‌ها و **جریان گدازه‌های آتش فشان** اشاره کرد.
- در صنعت نیز حرکت سیالات رنگی و پلیمری، جریان سیالات درون یاتاقان‌ها، تجهیزات میکروالکترومکانیکی معمولاً توسط جریان استوکسی قابل تشریح و بررسی است.



جریان عسل
نیز نمونه ای از
جریان خزشی
است.

فرضیات معادله جریان خزشی:

✓ در جریان خزشی از اثرات گرانشی می توان صرفنظر کرد.

✓ همچنین برای جریان دائمی یا نوسانی عدد اشتروهل مرتبه یک است و می توان از ترم شتاب غیردائمی صرفنظر کرد.

✓ همچنین ترم شتاب انتقالی نیز از مرتبه ۱ است.

در نتیجه معادله ناویر استوکس به صورت زیر ساده می شود

$$[\text{St}] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = -[\text{Eu}] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{\text{Fr}^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad \text{معادله کامل ناویر-استوکس}$$

$$[\text{Eu}] \vec{\nabla}^* P^* \cong \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad \text{معادله جریان خزشی (بدون بعد)}$$

$$\vec{\nabla} P \cong \mu \nabla^2 \vec{V} \quad \text{معادله جریان خزشی (با بعد)}$$

• در جریان خزشی نیروهای اینرسی قابل صرف نظر اند.



یک شناگر در رینولدز بالا حرکت می کند (حتی اگر کند شنا کند) و ترم اینرسی بزرگ است در نتیجه شخص بدون حرکت قادر به سر خوردن است.



یک بچه که در استخر توپهای پلاستیکی است (بدون تماس کف و دیوارها) تنها به صورت حرکت مارشکل می تواند جلو برود و در لحظه ای که تکان نخورد تمام جلو رفتنش متوقف می شود به دلیل اینرسی کم.

تمرین ۲

• آیا می توان در عسل شنا کرد؟



تمرین ۳

• تفاوت لزجت و چگالی را با ذکر مثال شرح دهید.

درگ روی یک کره در جریان خزشی

- با آنالیز ابعادی نشان داده می شود که نیروی درگ وارد به یک جسم سه بعدی در جریان خزشی برابر است با

$$F_D = \text{constant} \cdot \mu VL$$

- مقدار ثابت در رابطه به شکل و جهت آن در میدان جریان بستگی دارد.

- برای کره به صورت زیر دست می آید

$$F_D = 3\pi\mu VD$$

A volcano has erupted, spewing stones, steam, and ash several thousand meters into the atmosphere (Fig. 10–14). After some time, the particles begin to settle to the ground. Consider a nearly spherical ash particle of diameter $50\text{ }\mu\text{m}$, falling in air whose temperature is -50°C and whose pressure is 55 kPa . The density of the particle is 1240 kg/m^3 . Estimate the terminal velocity of this particle at this altitude.

SOLUTION We are to estimate the terminal velocity of a falling ash particle.

Assumptions 1 The Reynolds number is very small (we will need to verify this assumption after we obtain the solution). 2 The particle is spherical.

Properties At the given temperature and pressure, the ideal gas law gives $\rho = 0.8588 \text{ kg/m}^3$. Since viscosity is a very weak function of pressure, we use the value at -50°C and atmospheric pressure, $\mu = 1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$.

Analysis We treat the problem as quasi-steady. Once the falling particle has reached its terminal settling velocity, the net downward force (weight)

حل

balances the net upward force (aerodynamic drag + buoyancy), as illustrated in Fig. 10–15.

Downward force:
$$F_{\text{down}} = W = \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{particle}} g \quad (1)$$

The aerodynamic drag force acting on the particle is obtained from Eq. 10–12, and the buoyancy force is the weight of the displaced air. Thus,

Upward force:
$$F_{\text{up}} = F_D + F_{\text{buoyancy}} = 3\pi\mu VD + \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{air}} g \quad (2)$$

We equate Eqs. 1 and 2, and solve for terminal velocity V ,

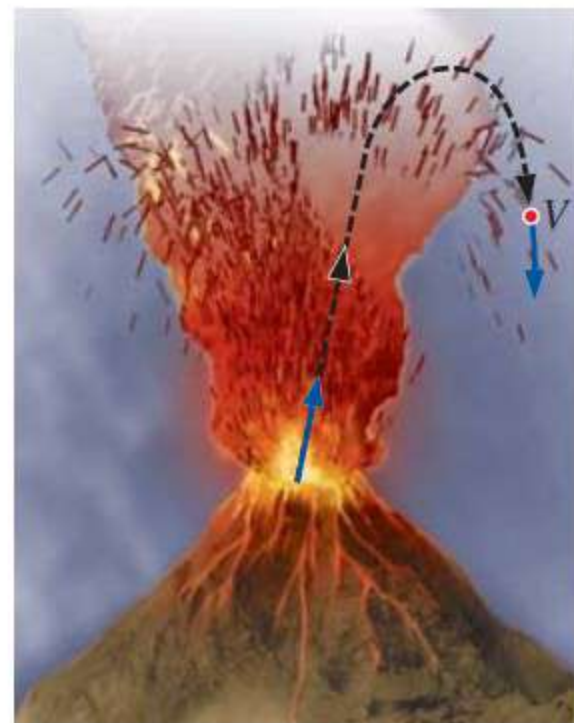
$$\begin{aligned} V &= \frac{D^2}{18\mu} (\rho_{\text{particle}} - \rho_{\text{air}}) g \\ &= \frac{(50 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{18(1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s})} [(1240 - 0.8588) \text{ kg/m}^3] (9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= \mathbf{0.115 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Finally, we verify that the Reynolds number is small enough that creeping flow is an appropriate approximation,

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{air}} VD}{\mu} = \frac{(0.8588 \text{ kg/m}^3)(0.115 \text{ m/s})(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 0.335$$

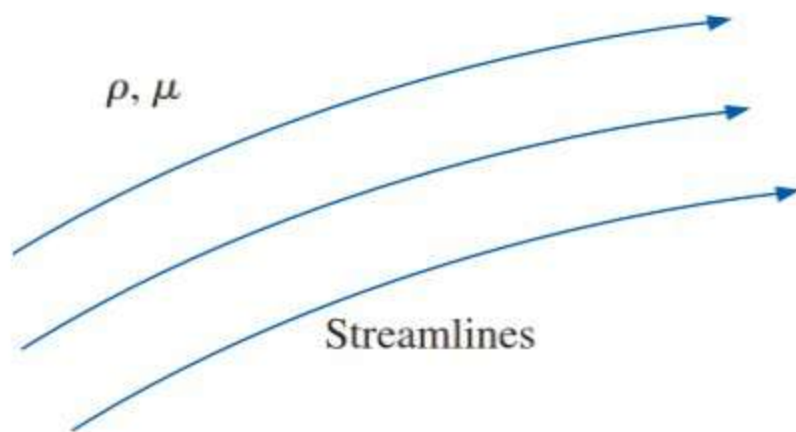
Thus the Reynolds number is less than 1, but certainly not *much* less than 1.

Discussion Although the equation for creeping flow drag on a sphere (Eq. 10–12) was derived for a case with $\text{Re} \ll 1$, it turns out that the approximation is reasonable up to $\text{Re} \approx 1$. A more involved calculation, including a Reynolds number correction and a correction based on the mean free path of air molecules, yields a terminal velocity of 0.110 m/s (Heinsohn and Cimbala, 2003); the error of the creeping flow approximation is less than 5 percent.



۴- جریان غیر لزج

- تمام سیالات در مسائل مهندسی لزجت دارند. پس عبارت “جریان غیر لزج” به معنای جریان سیالی بدون لزجت نیست.
- عبارت جریان غیرلزج به جریان یک سیال لزج در محدوده ای که نیروهای لزج در مقایسه با نیروهای فشاری و/یا اینرسی قابل صرفنظر باشد، گفته می شود.



$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \rho \vec{g} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\text{negligible}}$$

- اگر نیروهای خالص لزج در مقایسه با نیروهای فشاری و/یا اینرسی بسیار کوچک باشند، ترم آخر در سمت راست معادله ناویر-استوکس را می توان حذف کرد.

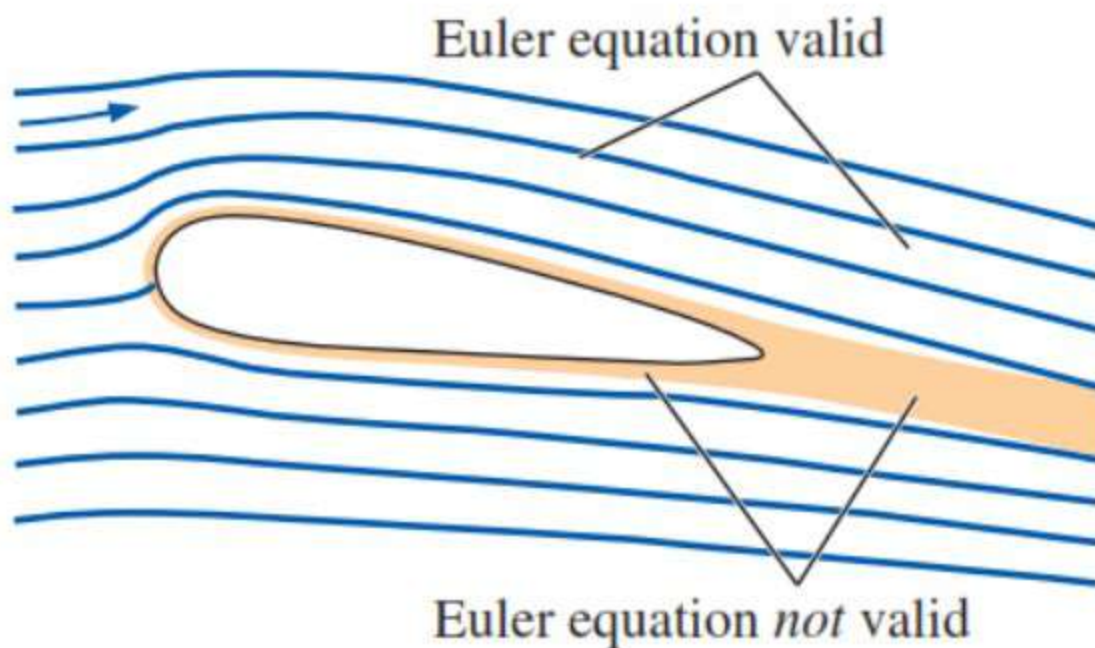
$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad \text{معادله کامل ناویر-استوکس}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad \text{معادله اولر}$$

- در جریان غیرلزج معادله ناویر-استوکس به **معادله اولر** تبدیل می شود.
- معادله اولر معادله ناویر-استوکس است که ترم لزج آن حذف شده است.

- معادله اولر در جریان لایه مرزی و جریان دنباله جسم معتبر نیست.

- معادله اولر در جریانهای رینولدز بالا و دور از دیواره ها و دنباله ها معتبر است.



- در استفاده از تقریب اولر دیگر شرط مرزی عدم لغزش روی مرز سطوح صلب معتبر نیست. اما هنوز می توان از شرط عدم نفوذ استفاده کرد.
- حل معادله اولر در نزدیکی دیواره ها معنی فیزیکی ندارد اما می تواند به عنوان تقریب اولیه ای برای محاسبات ناویر استوکس استفاده شود (برای کاهش زمان و هزینه محاسبات CFD).

معادله برنولی در جریان غیرلزج

- می توان با کمک معادله اولر معادله برنولی را روی یک خط جریان استخراج کرد.

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

معادله اولر

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

تساوی برداری

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\zeta}$$

چرخش جریان

$$\vec{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\zeta} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} = \vec{\nabla} \left(-\frac{P}{\rho} \right) + \vec{g}$$

فرم دائمی معادله اولر

$$\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz) \quad \text{گرانش در جهت } z$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = \vec{V} \times \vec{\zeta}$$

z = vertical distance

$\vec{k}$ = unit vector in z -direction

$$\vec{\nabla}(z) = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_0 \vec{i} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_0 \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_1 \vec{k} = \vec{k}$$

Thus, $\vec{g} = -g\vec{k} = -g\vec{\nabla}z = \vec{\nabla}(-gz)$

معادله برنولی برای جریان دائمی تراکم ناپذیر در جریان غیرلزج

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

تمرین ۴

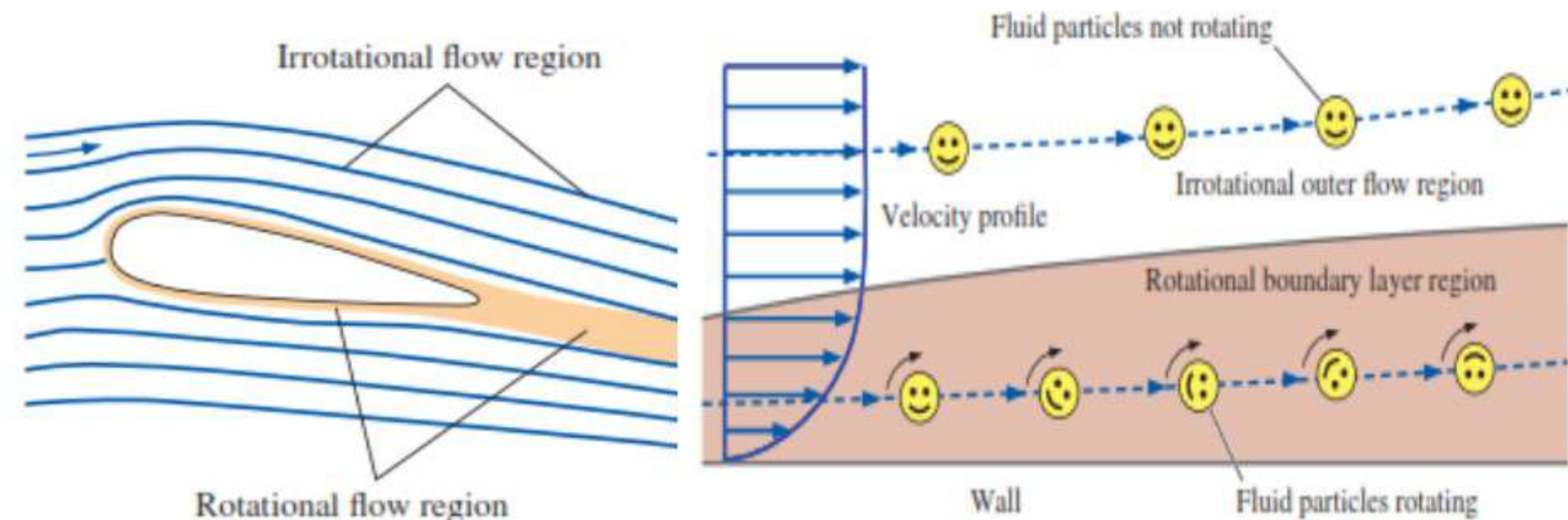
• اثبات کنید

$$\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = \vec{V} \times \vec{\zeta} \longrightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

۵- جریان غیر چرخشی (جریان پتانسیل)

- ناحیه ای از جریان که نرخ چرخش خالص جریان صفر است.

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \cong 0$$
- فرض غیر چرخشی بودن یک تقریب است و در برخی نواحی معتبر نیست.



در حالت کلی نواحی غیرلنزج جریان دور از

دیواره جسم و دنباله جریان غیر چرخشی است.

تفاوت بین جریان چرخشی و غیر چرخشی.

معادله پیوستگی

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0, \text{ then } \vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{تساوی برداری}$$

□ اگر کرل یک بردار صفر باشد (مثلا بردار دلخواه V)، آنگاه بردار را می توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر مانند ϕ ، تابع پتانسیل، بیان کرد.

□ به بیان ساده در جریان غیرچرخشی می توان بردار سرعت را به صورت گرادیان یک تابع اسکالر به نام تابع پتانسیل سرعت بیان کرد.

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

معادله جریان غیرچرخشی

Proof of the vector identity:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$

Expand in Cartesian coordinates,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi =$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0$$

The identity is proven if ϕ is a smooth function of x , y , and z .

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{در دستگاه کارتزین} \quad \vec{V} = \vec{\nabla} \phi$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{در دستگاه استوانه ای}$$

- اگر معادله جریان غیرچرخشی در معادله پیوستگی جایگزین شود.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$$

- برای یک جریان غیرچرخش معادله پیوستگی می شود.

$$\nabla^2 \phi = 0$$

معادله پیوستگی
(معادله لاپلاس)

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

• اپراتور لاپلاسین

• جذابیت این تقریب جایگزینی سه مجهول (u, v, w) با یک مجهول (تابع پتانسیل سرعت) است.

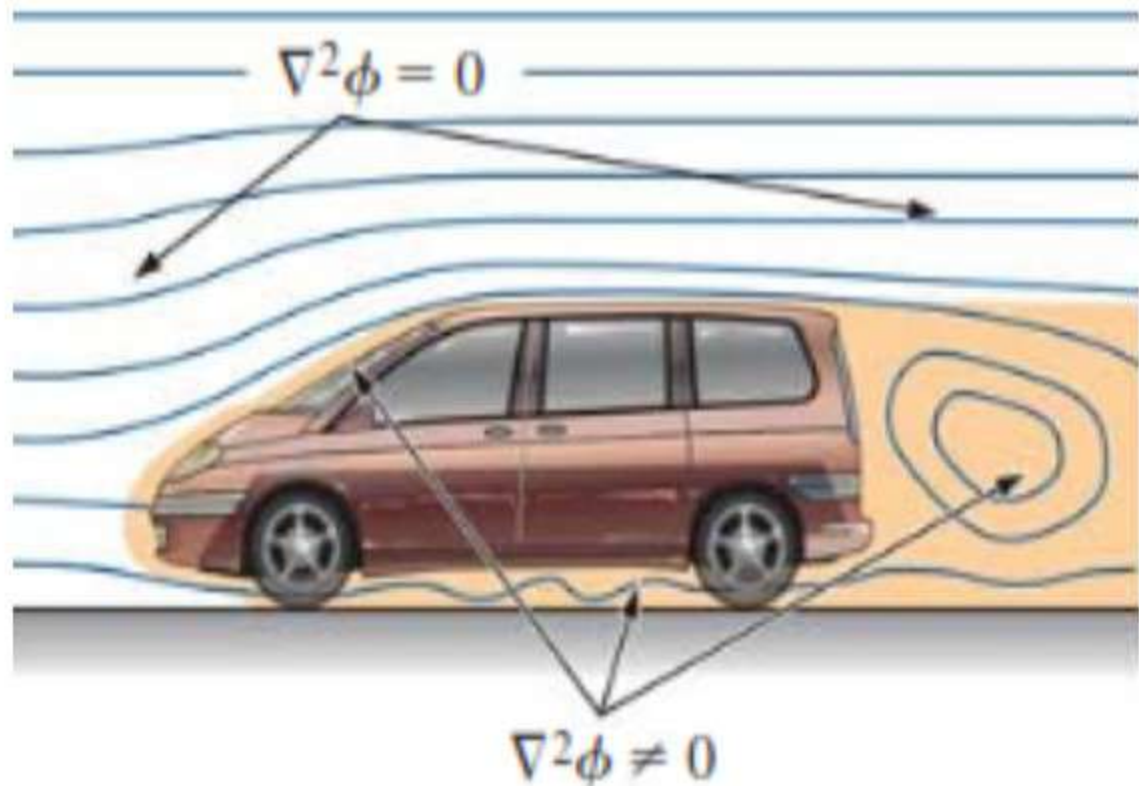
General 3-D incompressible flow;

- Unknowns = u, v, w , and P
- Four equations required

↓ Approximation

Irrotational region of flow:

- Unknowns = ϕ and P
- Two equations required



معادله لاپلاس در دستگاه کارتزین

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

تمرین ۵

- معادله لاپلاس در دستگاه استوانه ای را با تبدیل مفصلات کارتزین به استوانه ای استخراج کنید.

معادله مومنتوم

- در جریان غیرچرخشی با حل معادله لاپلاس میدان سرعت به دست می آید.
- با کمک معادله مومنتوم میدان فشار محاسبه می شود.

از پیوستگی ترم لزجت $\mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \nabla^2 (\vec{\nabla} \phi) = \mu \underbrace{\vec{\nabla} (\nabla^2 \phi)}_0 = 0$ مومنتوم حذف می شود.

- بنابراین معادله مومنتوم برای جریان غیرچرخشی به معادله اولر ساده می شود.

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

مشابه جریان غیرلزج می توان با کمک محاسبات برداری از معادله اولر به برنولی رسید (برای جریان پایای تراکم ناپذیر غیرچرخشی)

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

- تفاوت معادله برنولی در جریان غیرلزج و غیرچرخشی چیست؟ در جریان غیرلزج معادله برنولی روی یک خط جریان معتبر است و ثابت برنولی از خط جریانی به خط جریان دیگر متفاوت است اما در جریان غیرچرخشی ثابت برنولی در تمام محدوده یکسان است.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constant everywhere}$$

معادله برنولی جریان غیرچرخشی
دائمی تراکم ناپذیر.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C = \text{constant along streamlines}$$

معادله برنولی جریان غیرلزج
دائمی تراکم ناپذیر.

- پس با حل معادله برنولی توزیع فشار در جریان غیرچرخشی به دست می آید.

Calculate ϕ from continuity: $\nabla^2 \phi = 0$

گام اول

Calculate $\vec{V}$ from irrotationality: $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$

گام دوم

Calculate P from Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = C$$

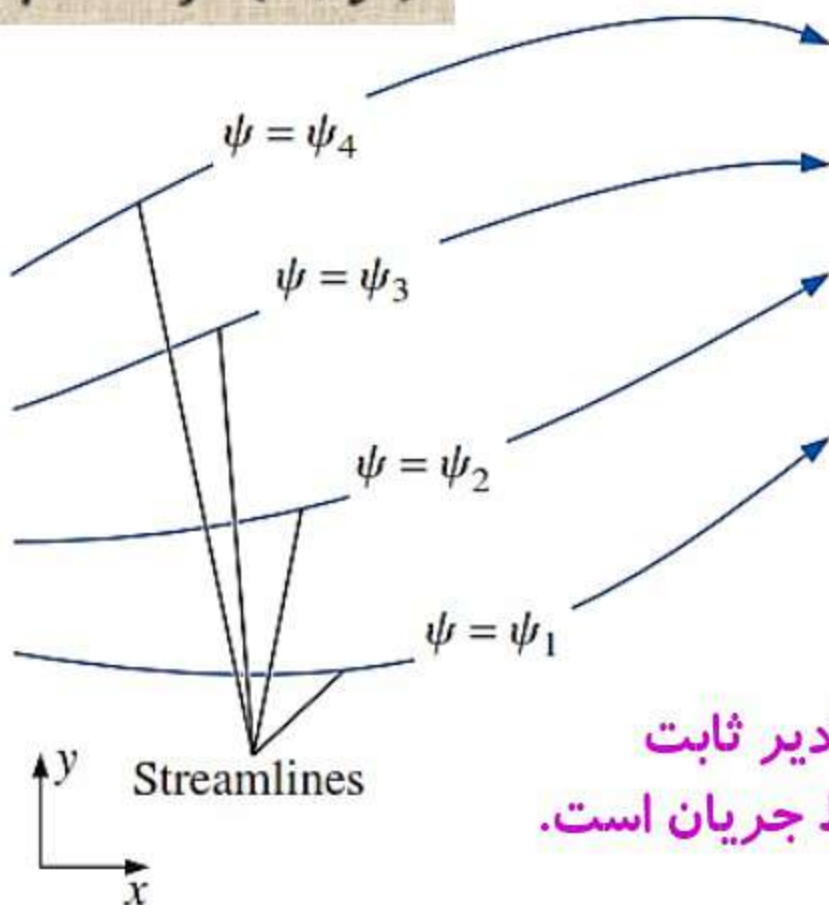
گام سوم

تعریف. تابع جریان

$$\psi = f(x, y)$$

- یک تابع دوبعدی در جریان تراکم ناپذیر
- تعریف تابع جریان:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



اگر منحنی تابع جریان به ازای مقادیر ثابت
مختلف رسم شود نتیجه آن خطوط جریان است.

جریان غیرچرخشی (دوبعدی)

- یک جریان غیرچرخشی دوبعدی در صفحه XY را در نظر بگیرید.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

- در جریان دوبعدی ($w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$) در نتیجه

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- با جایگزینی تعریف تابع جریان

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \psi = 0$$

- پس معادله لاپلاس هم برای تابع جریان و هم برای تابع پتانسیل سرعت کاربرد دارد.

به دست آمده از جریان غیرچرخشی $\nabla^2 \phi = 0$

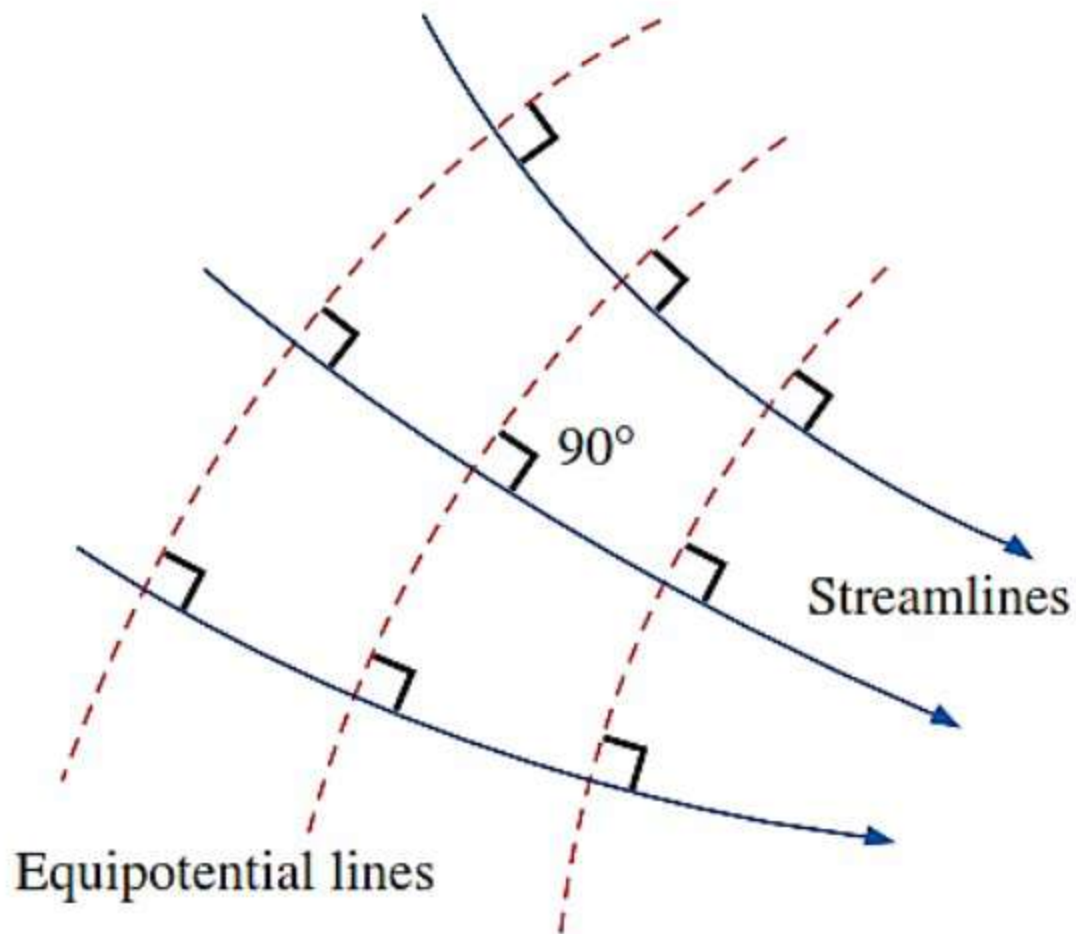
در جریان دائمی، تراکم ناپذیر،
غیرچرخشی و دوبعدی

به دست آمده از پیوستگی $\nabla^2 \psi = 0$

منحنی های مربوط به ψ ثابت خطوط جریان

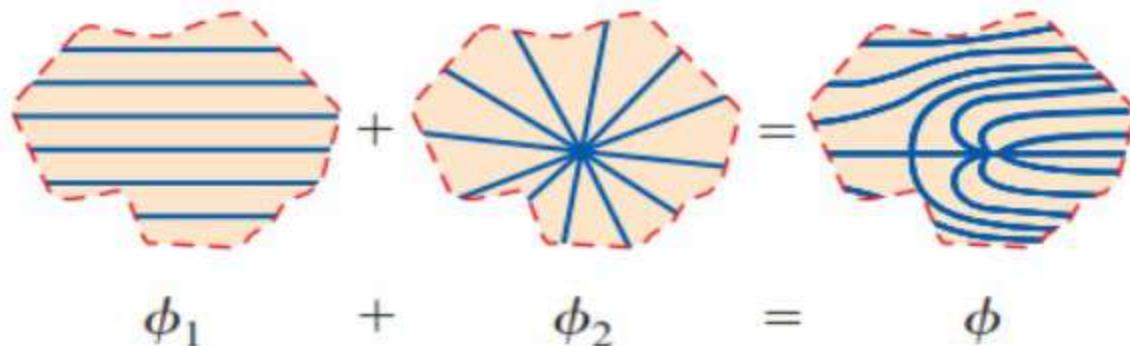
منحنی های مربوط به ϕ ثابت خطوط هم پتانسیل

• خطوط هم پتانسیل و خطوط جریان بر هم عمودند.



برهم نهی در جریان غیر چرخشی

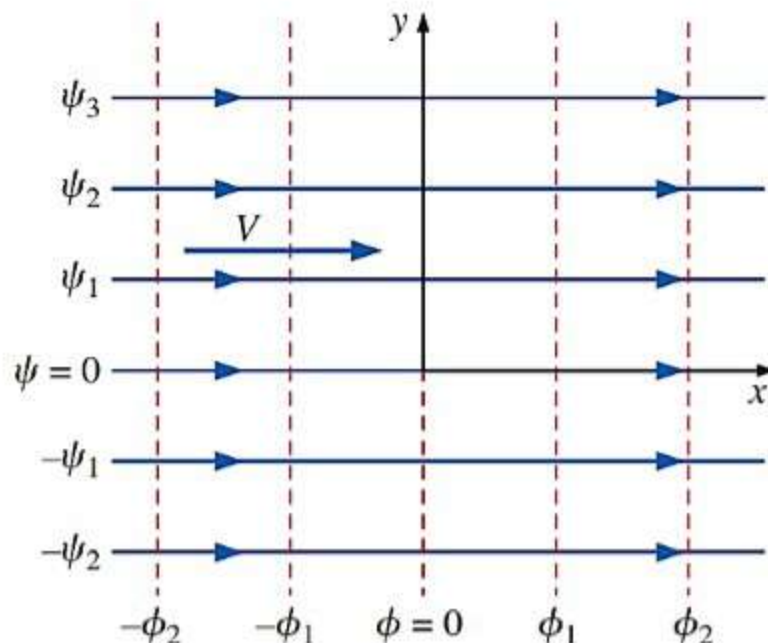
- معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل خطی همگن است.
- ترکیب خطی از دو یا چند جواب معادله نیز باید جواب معادله باشد.
- یعنی اگر ϕ_1 و ϕ_2 هر کدام جواب معادله لاپلاس باشند آنگاه $A\phi_1$ ، $A + \phi_1$ ، $\phi_1 + \phi_2$ و $A\phi_1 + B\phi_2$ نیز جواب معادله لاپلاس خواهند بود.
- فرآیند جمع دو یا چند حل برای تولید حل پیچیده **برهم نهی** نامیده می شود.



جریان های غیرچرخشی مقدماتی

- برای مدلسازی جریان های غیرچرخشی پیچیده با کمک اصل برهم نهی می توان جریان های ساده را ترکیب کرد.

1. **جریان یکنواخت:** جریانی که با سرعت ثابت V در جهت x از چپ به راست حرکت می کند.



تعامد خطوط جریان
و پتانسیل در جریان
یکنواخت

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

- تابع جریان و پتانسیل (جریان یکنواخت):

$$\phi = Vx + f(y) \longrightarrow v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = 0 \longrightarrow f(y) = \text{Constant}$$

- ثابت جواب دلخواه است می توان آن را صفر در نظر گرفت.
به طور مشابه برای تابع جریان نیز به دست می آید. در نتیجه

$$\phi = Vx$$

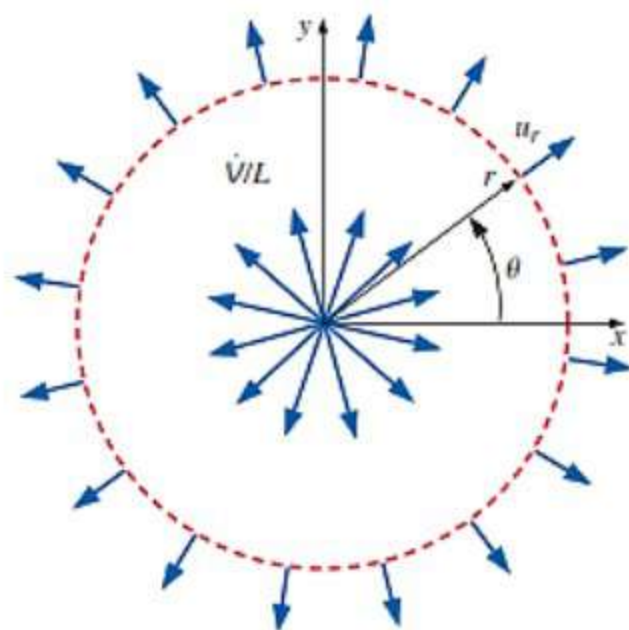
تابع پتانسیل سرعت برای جریان یکنواخت

$$\psi = Vy$$

تابع جریان برای جریان یکنواخت

۲. **جریان چشمه و یا چاه :** جریانی که در صفحه دو بعدی در تمام جهت ها به صورت خطی به سمت بیرون منتشر شود (چشمه) و یا از تمام جهات به سمت مرکز جریان داشته باشد (چاه)

• $\dot{V}$ دبی حجمی سیالی که منتشر می شود و $\dot{V}/L$ دبی بر واحد طول است.



$$\frac{\dot{V}}{L} = 2\pi r u_r \quad u_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r}$$

• با افزایش فاصله از مرکز سرعت شعاعی کم می شود.

• در مرکز سرعت شعاعی بینهایت است که به آن **نقطه سینگولاریتی** گفته می شود.

- تابع جریان و پتانسیل (جریان چشمه و چاه):

در دستگاه مختصات قطبی برای چشمه و چاه تنها سرعت شعاعی وجود دارد و سرعت مماسی صفر است.

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

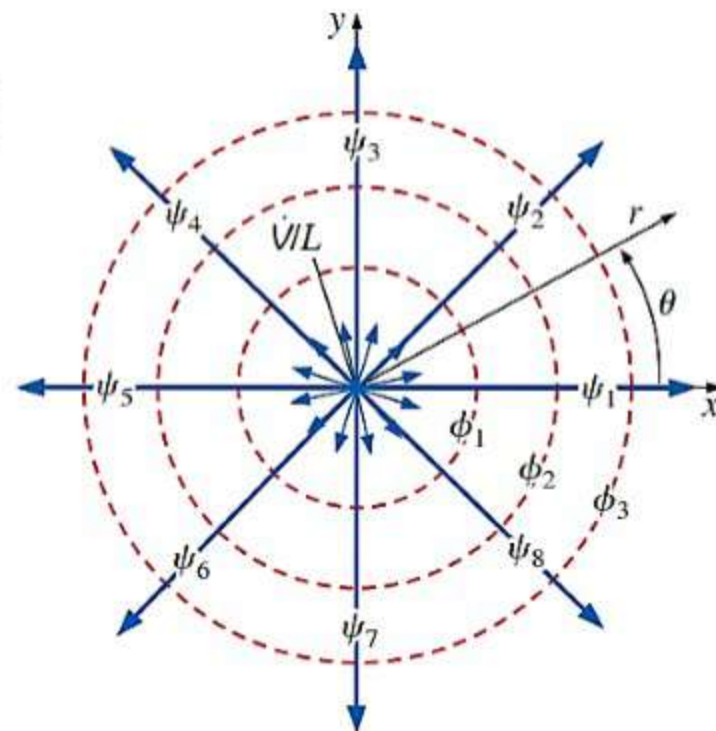
$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_{\theta} = 0 \rightarrow \psi = f(\theta)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = f'(\theta) = ru_r = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}$$

$$\rightarrow f(\theta) = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta + \text{constant}$$

$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta$$

$$\phi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln r$$



تابع جریان برای جریان چشمه و چاه

تابع پتانسیل برای جریان یکنواخت

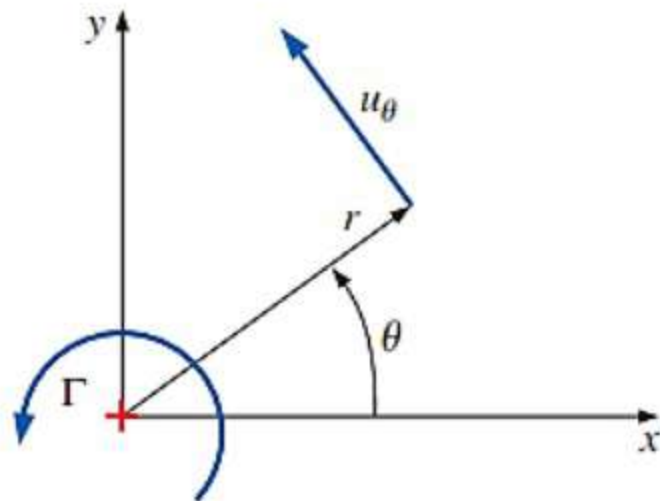
۳. **جریان گردابه:** جریانی که در صفحه دو بعدی جریان حول یک مرکز در شعاع های مختلف می چرخد.

✓ برای یک گردابه تنها سرعت مماسی وجود دارد و سرعت شعاعی صفر است.

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

Γ قدرت گردابه یا گردش است.

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$



تابع جریان برای جریان گردابه $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$

تابع پتانسیل برای جریان گردابه $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

EXAMPLE 10-5 Superposition of a Source and Sink of Equal Strength

Consider an irrotational region of flow composed of a line source of strength $\dot{V}/L$ at location $(-a, 0)$ and a line sink of the same strength (but opposite sign) at $(a, 0)$, as sketched in Fig. 10-48. Generate an expression for the stream function in both Cartesian and cylindrical coordinates.

SOLUTION We are to superpose a source and a sink, and generate an expression for ψ in both Cartesian and cylindrical coordinates.

Assumptions The region of flow under consideration is incompressible and irrotational.

Analysis We use Eq. 10-44 to obtain ψ for the source,

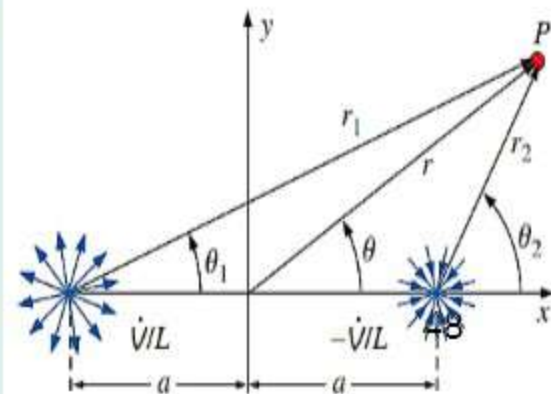
Line source at $(-a, 0)$:
$$\psi_1 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 \quad \text{where} \quad \theta_1 = \arctan \frac{y}{x + a} \quad (1)$$

Similarly for the sink,

Line sink at $(a, 0)$:
$$\psi_2 = -\frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_2 \quad \text{where} \quad \theta_2 = \arctan \frac{y}{x - a} \quad (2)$$

Superposition enables us to simply add the two stream functions, Eqs. 1 and 2, to obtain the composite stream function,

Composite stream function:
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$



We rearrange Eq. 3 and take the tangent of both sides to get

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (4)$$

where we have used a trigonometric identity (Fig. 10–49).

We substitute Eqs. 1 and 2 for θ_1 and θ_2 and perform some algebra to obtain an expression for the stream function,

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \frac{y}{x-a}} = \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

or, taking the arctangent of both sides,

Final result, Cartesian coordinates: $\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$

We translate to cylindrical coordinates by using Eqs. 10–38,

Final result, cylindrical coordinates: $\psi = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \arctan \frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \quad (6)$

Discussion If the source and sink were to switch places, the result would be the same, except that the negative sign on source strength $\dot{V}/L$ would disappear.

Useful Trigonometric Identities

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \beta \cot \alpha - 1}{\cot \beta + \cot \alpha} \quad (5)$$

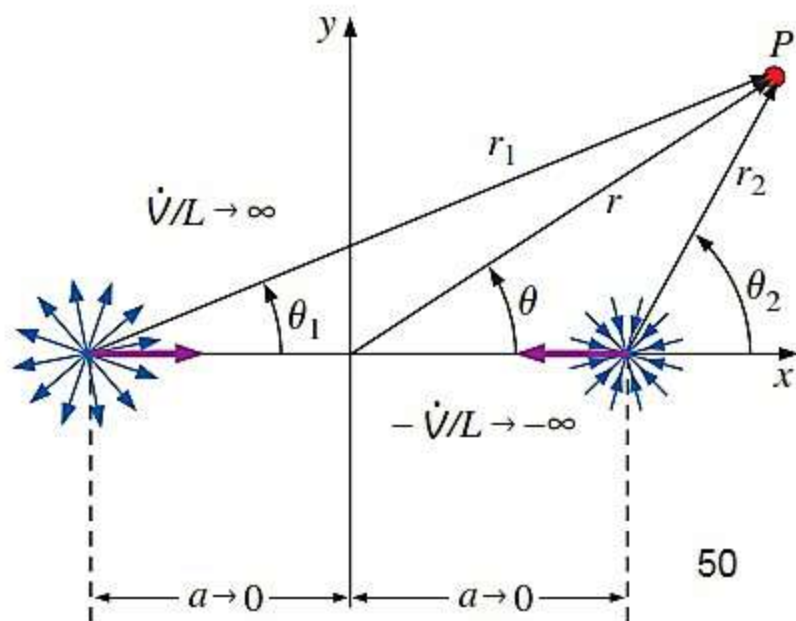
۴. **جریان دو قطبی:** از ترکیب یک چشمه و چاه هم قدرت که در یک نقطه قرار گرفته اند.

Stream function as $a \rightarrow 0$: $\psi \rightarrow \frac{-a(\dot{V}/L)r \sin \theta}{\pi(r^2 - a^2)}$

$$\psi = \frac{-a(\dot{V}/L)}{\pi} \frac{\sin \theta}{r} = -K \frac{\sin \theta}{r}$$

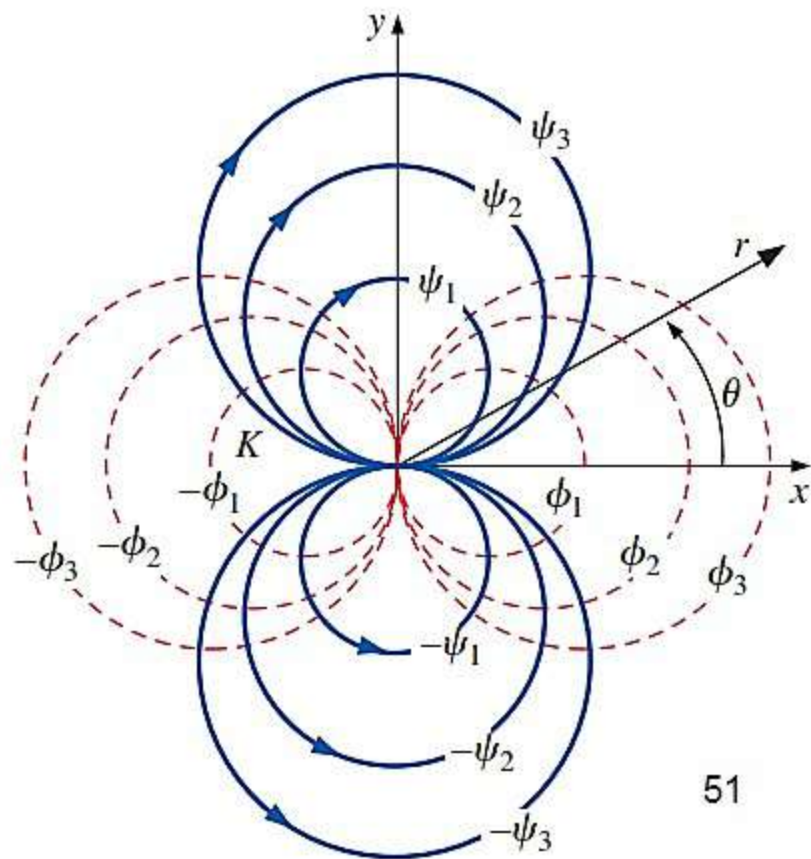
$$\phi = K \frac{\cos \theta}{r}$$

$$K = a(\dot{V}/L)/\pi \quad \text{قدرت دو قطبی}$$



$$\psi = -K \frac{\sin \theta}{r}$$

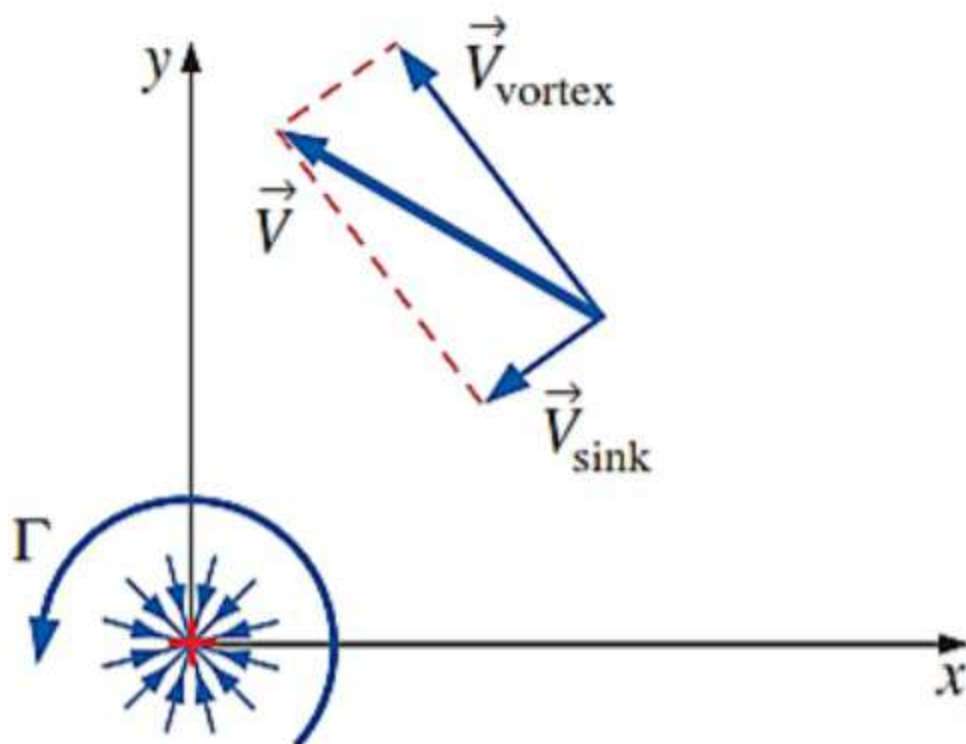
$$\phi = K \frac{\cos \theta}{r}$$



ترکیب جریان های غیر چرخشی مقدماتی

۱. ترکیب چاه و گردابه:

یک چاه با قدرت $\dot{V}/L$ و گردابه با قدرت Γ که هر دو در مبدا قرار گرفته اند. مثال فیزیکی این جریان، جریان حرکت چرخشی آب در سینک ظرفشویی است.



$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

برای رسم خطوط جریان این ترکیب تابع جریان را برابر با مقادیر ثابت قرار می دهیم و معادله را بر حسب شعاع از مبدا حل می کنیم

$$r = \exp\left(\frac{(\dot{V}/L)\theta - 2\pi\psi}{\Gamma}\right)$$

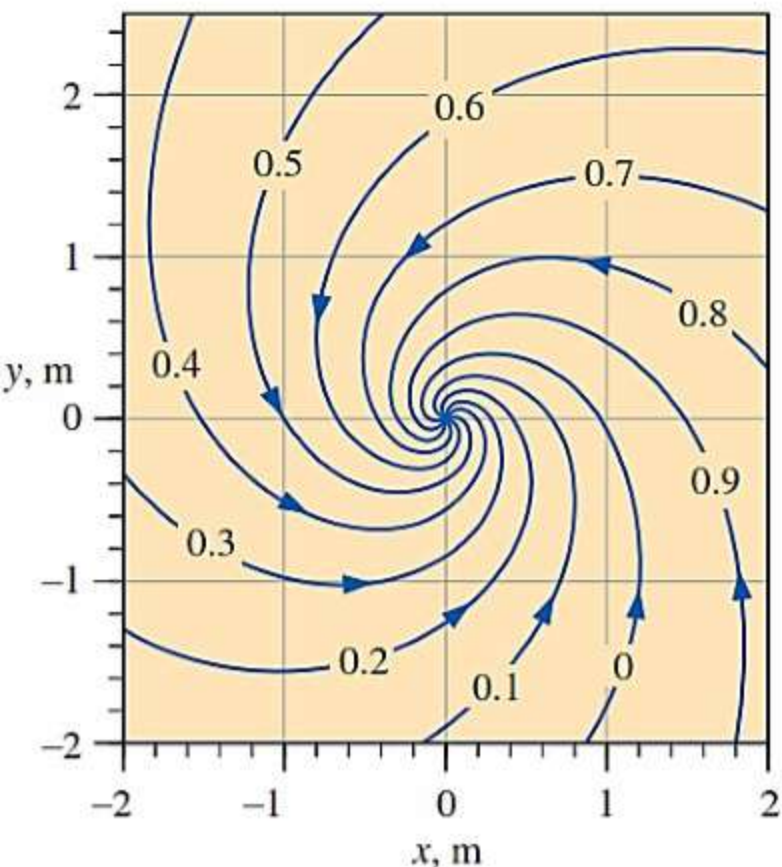
برای مثال اگر

$$\frac{\dot{V}}{L} = -\frac{1\text{m}^2}{\text{s}}, \Gamma = 1.5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

مولفه های سرعت

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

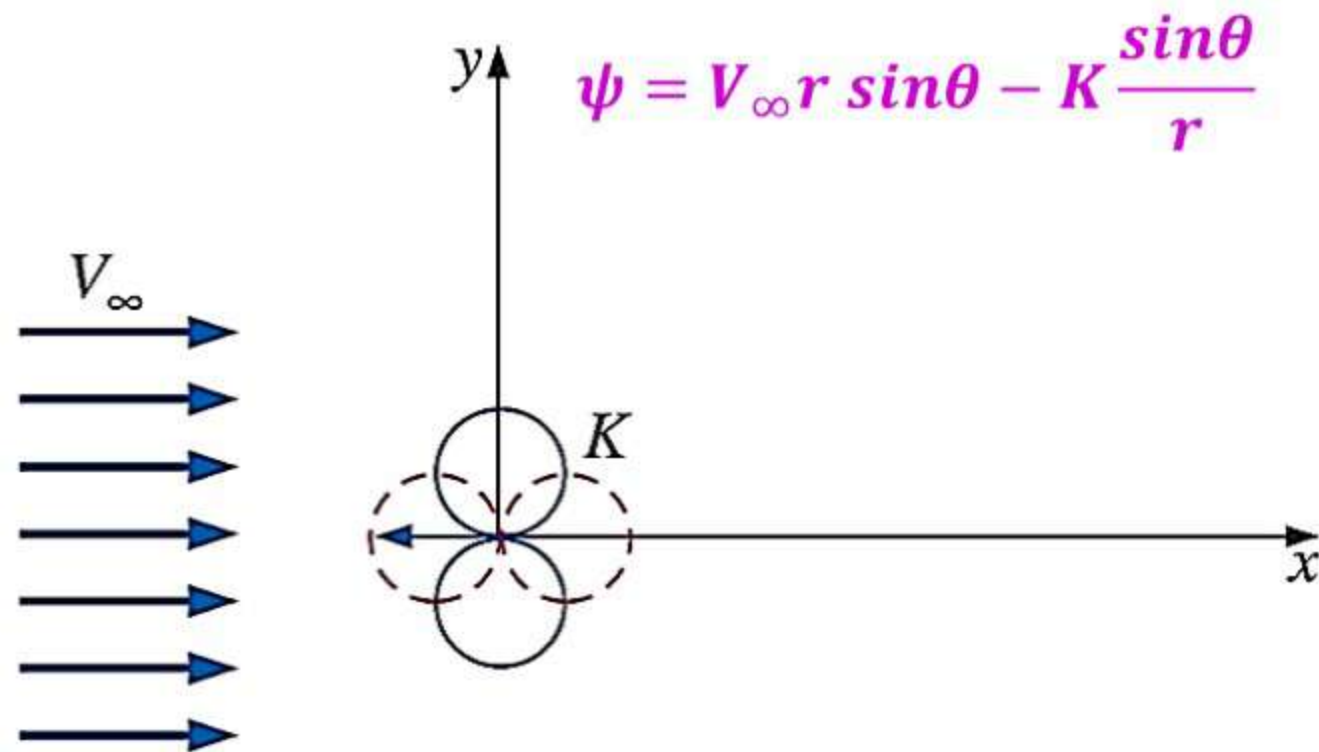
سرعت شعاعی فقط تابعی از چاه و
سرعت مماسی فقط تابعی از گردابه است.



۲. ترکیب جریان مستقیم و دو قطبی - (جریان روی سیلندر دایره ای):

یک جریان مستقیم با سرعت V_∞ و دو قطبی با قدرت K با مرکزیت مبدا در نظر بگیرید.

تابع جریان ترکیب با جمع تابع جریان دو قطبی و جریان یکنواخت به دست می آید.



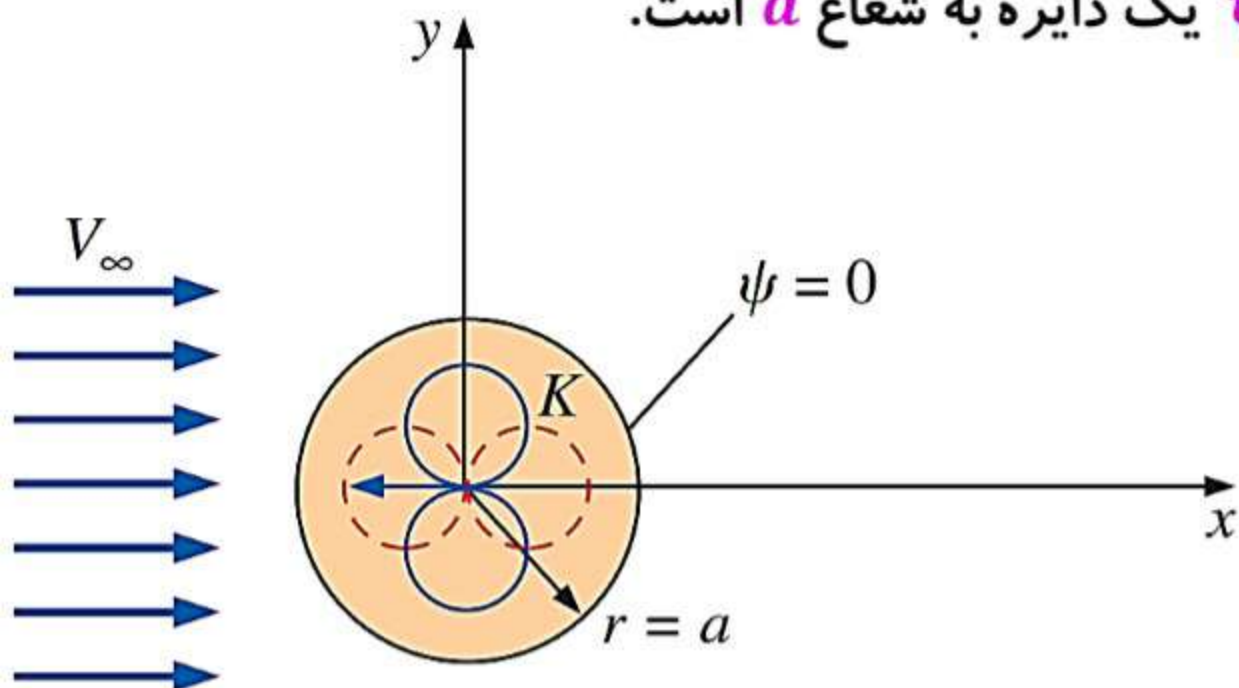
فرض کنید تابع جریان را برابر صفر قرار دهیم و در فاصله معلوم $r=a$ معادله تابع جریان برای قدرت دو قطبی را حل کنیم.

$$K = V_{\infty} a^2$$

و تابع جریان می شود

$$\psi = V_{\infty} \sin\theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

خط جریان مربوط به $\psi = 0$ یک دایره به شعاع a است.



برای رسم بقیه خطوط جریان باید معادله بالا را برای r بر حسب θ حل کنیم.

$$\psi = V_{\infty} \sin\theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{V_{\infty} a} \quad r^* = \frac{r}{a}$$

تابع جریان را با پارامترهای زیر بی بعد می کنیم.

θ

$$\psi^* = \sin\theta \left(r^* - \frac{1}{r^*} \right)$$

تابع جریان بدون بعد

معادله بالا را برای r بر حسب θ حل کنیم

$$r^* = \frac{\psi^* \mp \sqrt{(\psi^*)^2 + 4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$$

خطوط جریان بدون بعد

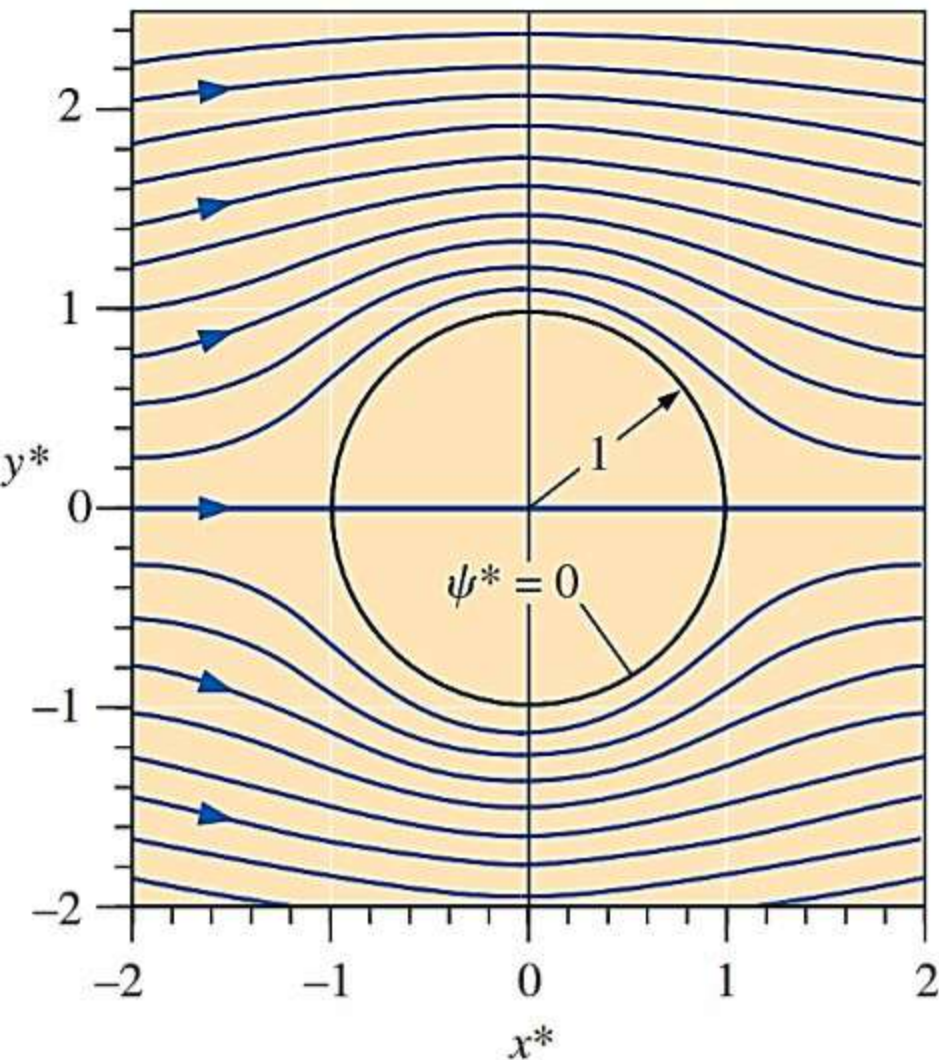
$$r^* = \frac{\psi^* \mp \sqrt{(\psi^*)^2 + 4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$$

خط جریان $\psi = 0$ به عنوان یک دیوار صلب عمل می کند.

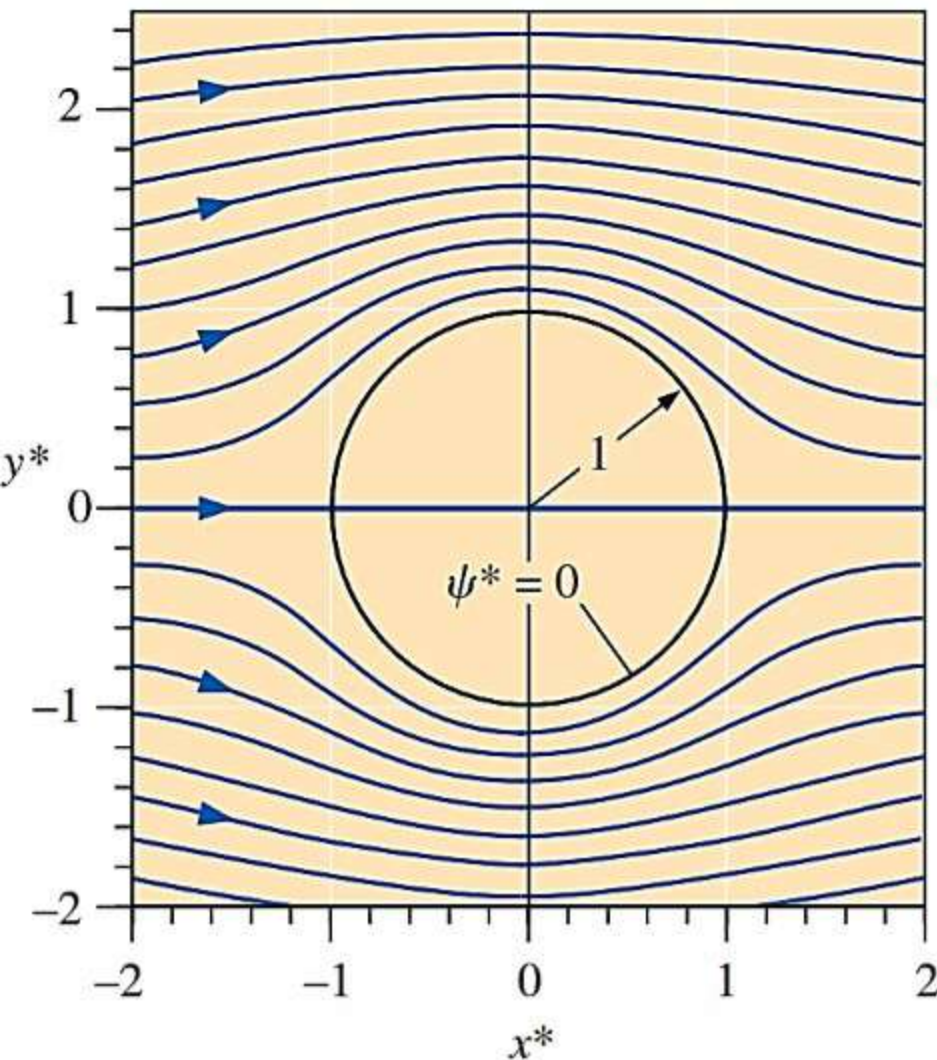
این جریان ترکیبی جریان پتانسیل روی سیلندر دایره ای را نتیجه می دهد

دو نقطه سکون برای جریان وجود دارد: یکی در ابتدای سیلندر، یکی در انتهای آن

خطوط جریان بدون بعد به دست آمده از ترکیب جریان یکنواخت و دو قطبی در مرکز



خطوط جریان در نزدیکی نقاط سکون فاصله دارند چون جریان آنجا کند است.
خطوط جریان در بالا و پایین سیلندر نزدیک اند چون جریان آنجا سریعتر است.



تقارن جریان در بالا و پایین سیلندر منطقی است.

آیا تقارن جلو و عقب سیلندر نیز منطقی است؟
خیر چون در واقعیت در پشت سیلندر ناچیه
ویک تشکیل می شود و جریان متقارن نخواهد
بود.

جریان پتانسیل (غیر چرخشی)
تنها تقریبی از جریان واقعی است.

مولفه های سرعت

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

مولفه های سرعت روی سطح سیلندر ($r = a$)

$$u_r = 0$$

$$u_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta$$

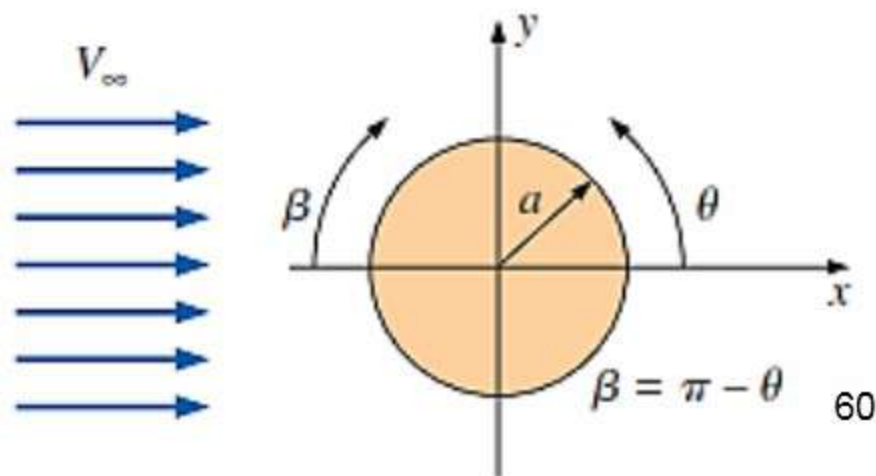
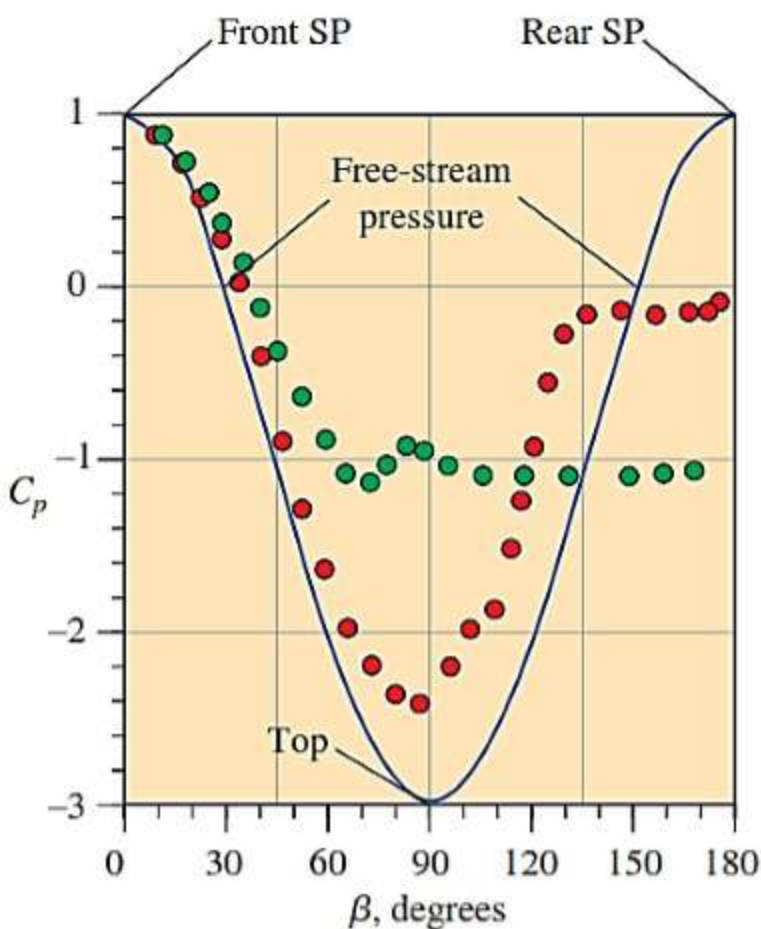
یعنی شرط عدم لغزش در جریان غیرچرخشی معتبر نیست

تمرین ۶

- نشان دهید توزیع فشار روی سیلندر دایره ای در جریان غیر چرغشی به صورت زیر به دست می آید.

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \beta$$

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$



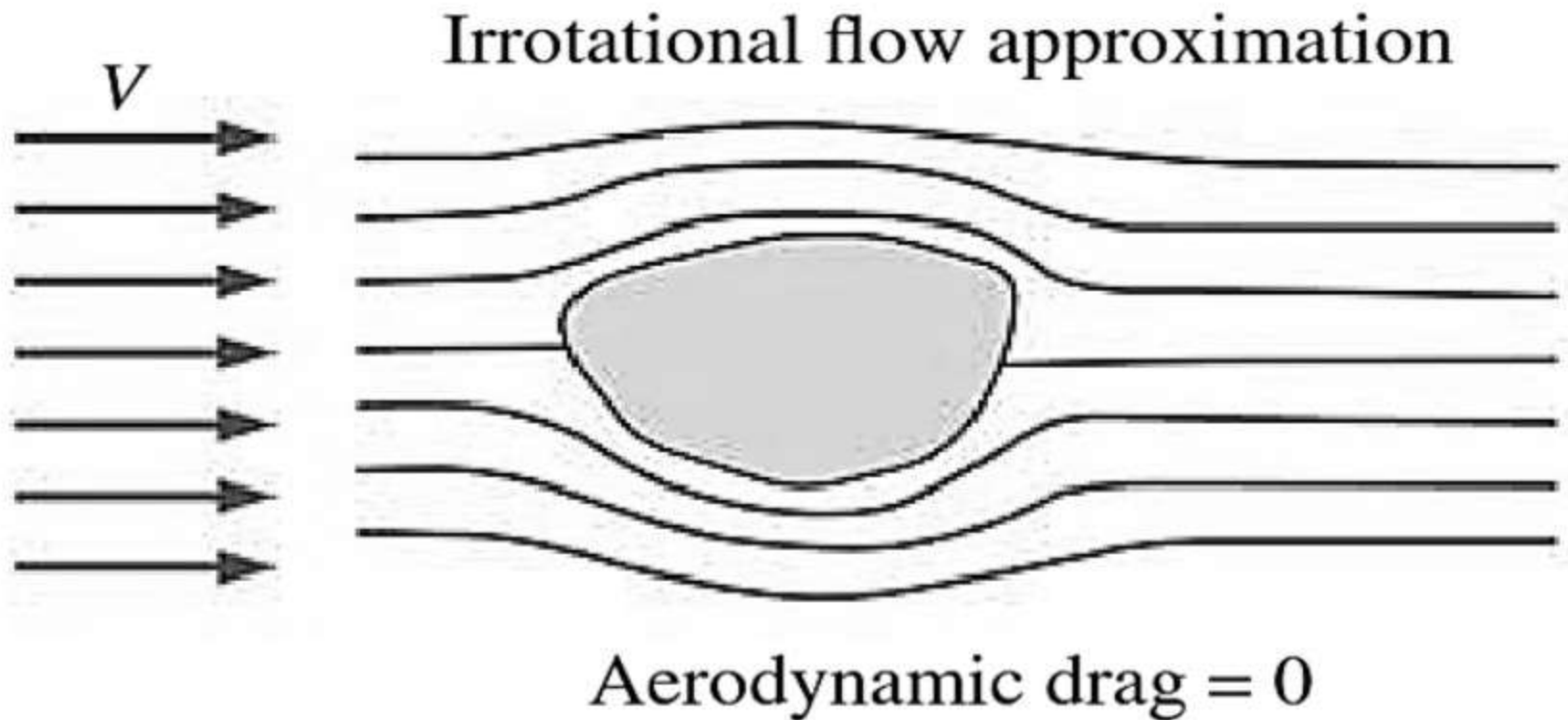
- اثبات شد که توزیع فشار اطراف یک سیلندر دایره ای در جریان غیرچرخشی متقارن است.

- در نتیجه نیروی خالص درگ فشاری روی سیلندر صفر است. همچنین در جریان غیرچرخشی درگ برشی وجود ندارد.

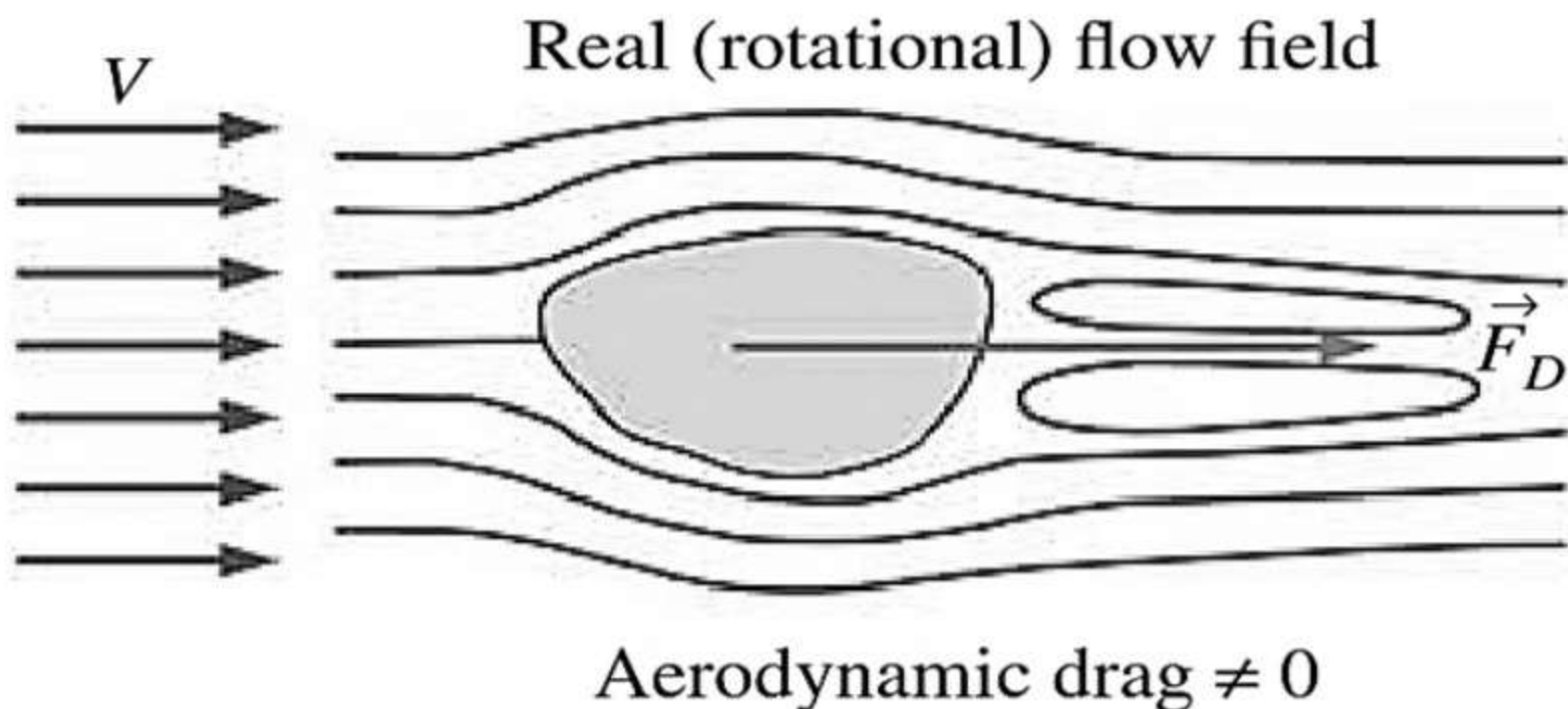
- پس نیروی خالص درگ روی سیلندر در جریان غیرچرخشی صفر است.

تناقض دالامبر (۱۷۵۲)

- با فرض جریان غیرچرخشی، نیروی درگ وارد به جسم بدون لیفت و مغروق با هر شکلی در جریان یکنواخت صفر است.



- در جریان واقعی فشار پشت جسم به مراتب کمتر از فشار جلوی جسم است این اختلاف فشار اگر جسم حجیم تر باشد افزایش می یابد و باعث غیر صفر شدن درگ فشاری می شود.



۶- تقریب لایه مرزی

- مشاهده شد که در دو نوع جریان می توان از اثرات ترم لزجت در ناویراستوکس صرفنظر کرد:

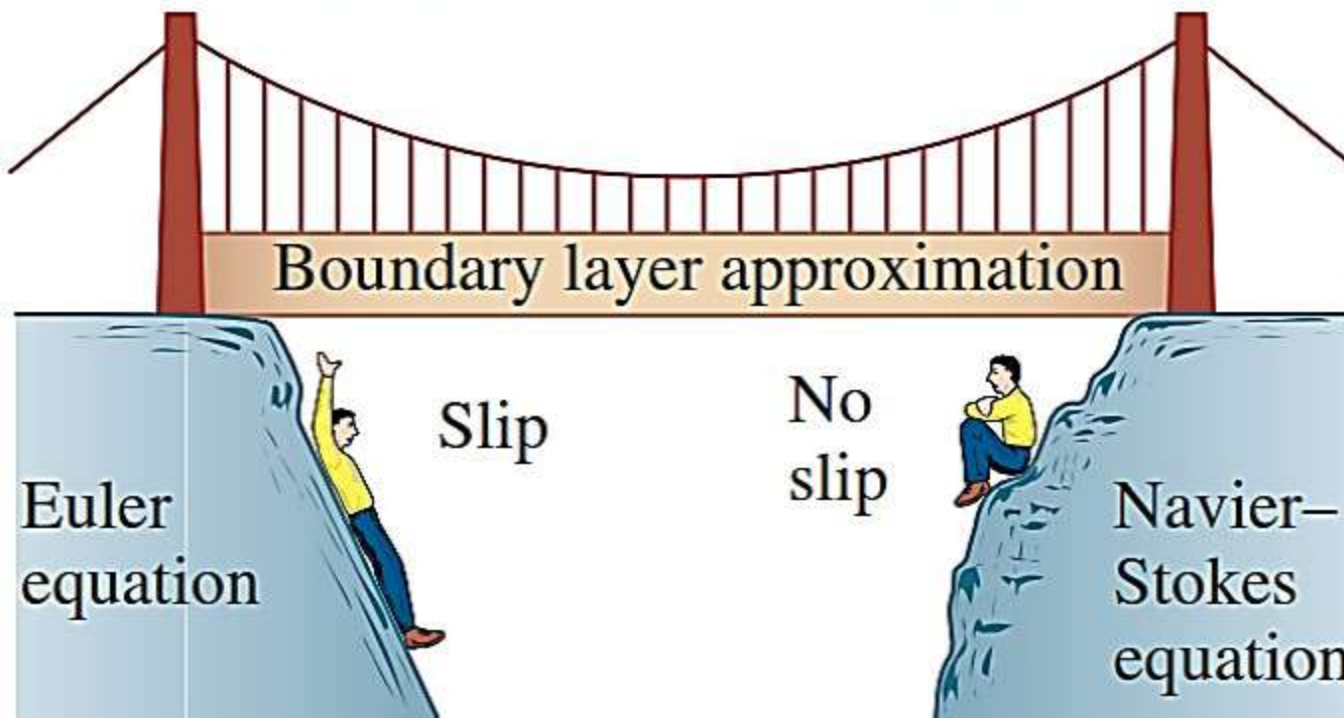
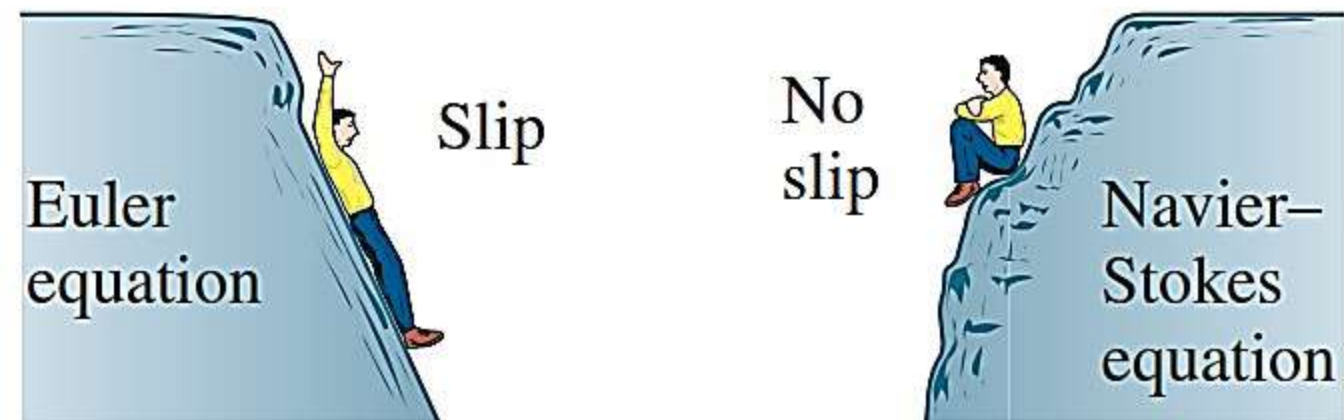
✓ **جریان غیرلزج:** در نواحی رینولدز بالا که ترم لزجت در مقایسه با ترم اینرسی و / یا فشاری قابل صرفنظر است.

✓ **جریان غیرچرخشی (پتانسیل):** در نواحی که چرخش قابل صرفنظر است.

در هر دو حالت معادله ناویر-استوکس به معادله اولر ساده می شود.

اگرچه حل معادله اولر بسیار ساده تر از ناویراستوکس است اما کاربرد این تقریب محدودیتهای مهمی دارد که مهمترین آنها **عدم ارضای شرط عدم لغزش** روی دیواره جسم است.

با تقریب اولر (جریان غیرلزج و غیرچرخشی) درگ اصطکاکی و فشاری وارد به دیواره اجسام صلب مغروق در معرض جریان یکنواخت صفر است.



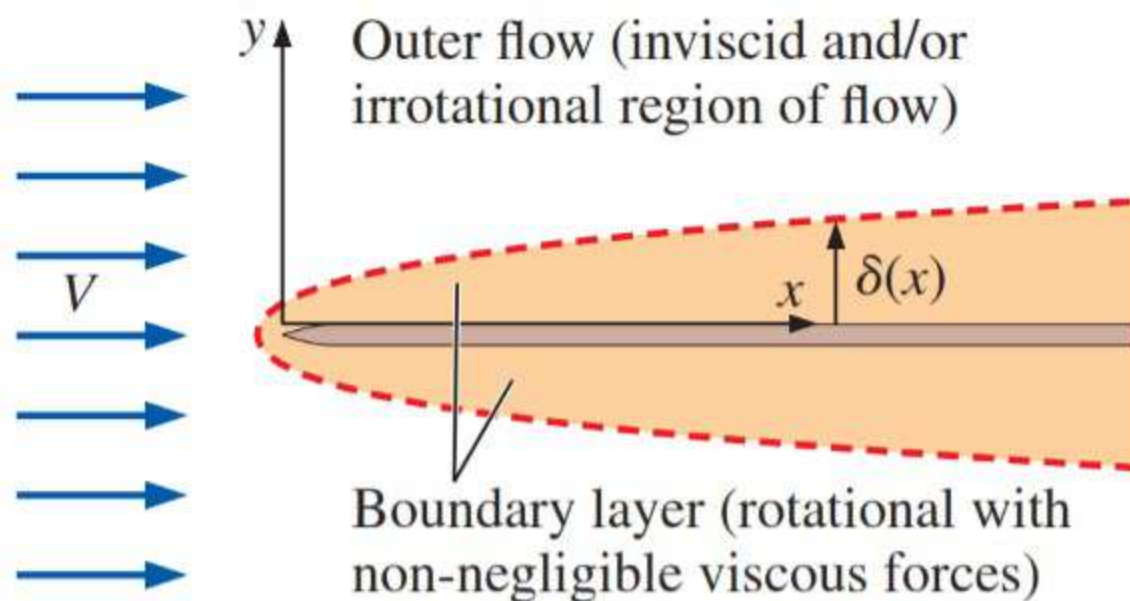
تقریب لایه مرزی پل بین
معادله اولر و ناویر-
استوکس و شرط لغزش و
عدم لغزش روی دیواره
صلب است.

- در سال ۱۹۰۴ لودوینگ پرائتل تقریب لایه مرزی را معرفی کرد.

- در ایده پرائتل جریان به دو بخش تقسیم می شد:

✓ محدوده جریان بیرونی: جریان غیرلزج و/یا غیرچرخشی

✓ محدوده جریان داخلی: جریان لایه مرزی نزدیک مرز صلب



- در بیرون لایه مرزی معادلات پیوستگی و اولر حل می شوند.

- در داخل لایه مرزی معادلات لایه مرزی حل می شوند.

- معادلات لایه مرزی خود تقریبی از معادلات ناویر-استوکس هستند.

- البته امروزه با پیشرفت کامپیوتر و روش های عددی قابلیت حل

عددی معادله ناویر-استوکس ایجاد شده است (CFD) و نیازی به

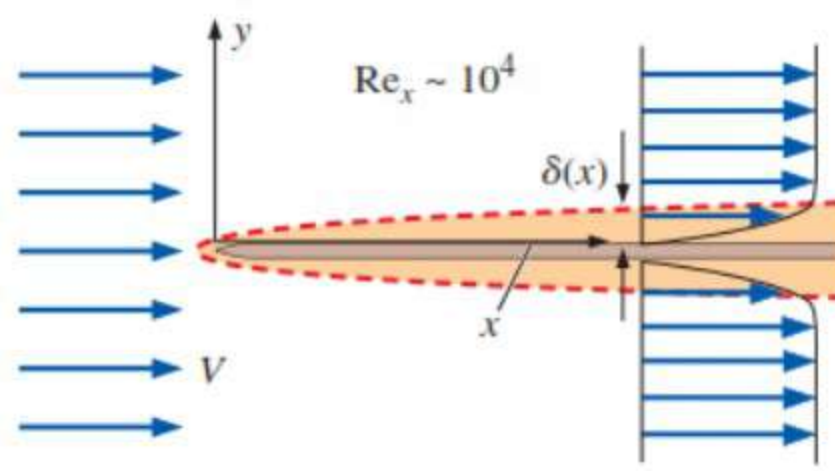
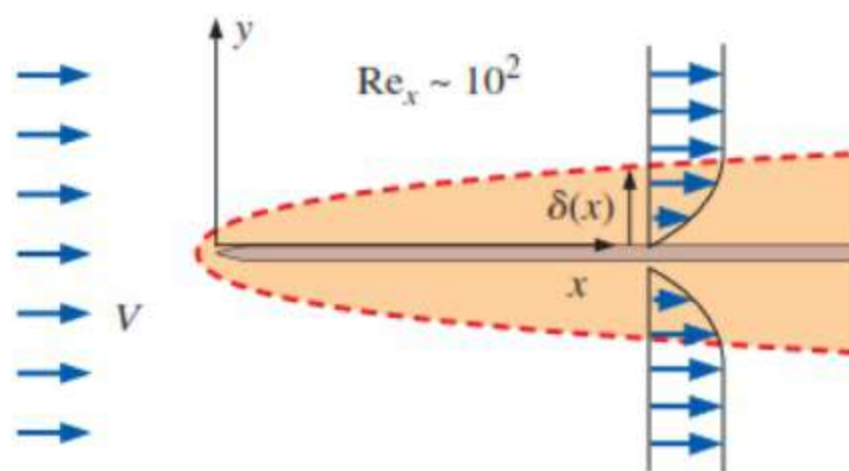
تقسیم جریان به محدوده لایه مرزی و بیرون آن نیست.

✓ فرض مهم در تقریب لایه مرزی نازک بودن ضخامت لایه مرزی در مقایسه با طول جسم است. $\delta/x \ll 1$

✓ جریان اطراف صفحه تخت مساله کلاسیک بررسی لایه مرزی است.

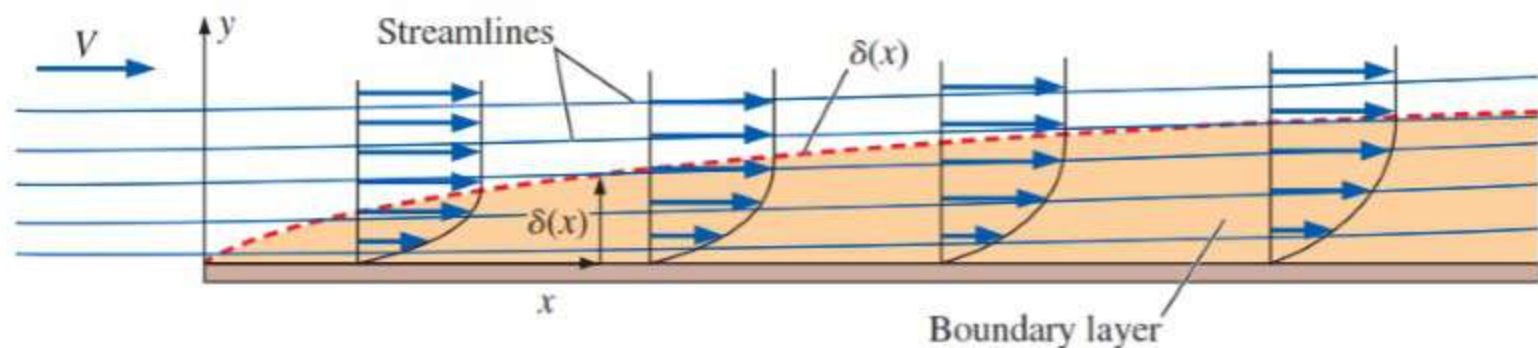
✓ ضخامت لایه مرزی δ : فاصله عمودی از صفحه تا موقعیتی که سرعت موازی صفحه ۹۹ درصد سرعت جریان بیرون لایه مرزی شود.

✓ در یک فاصله مشخص x از صفحه هر چه عدد رینولدز بیشتر باشد ضخامت لایه مرزی کمتر است.



- ضخامت لایه مرزی تابعی از فاصله از لبه صفحه است و با افزایش فاصله از لبه صفحه $\delta(x)$ افزایش می یابد.

- نمودار لایه مرزی یک خط جریان نیست.



- با افزایش ضخامت لایه مرزی در پایین دست جریان، خطوط جریان گذرنده از داخل لایه مرزی مقداری به سمت بالا واگرا می شوند.

- برای جریان آرام ضخامت لایه مرزی تابعی از

$$\delta = f(V, \rho, \mu, x)$$

است. با آنالیز ابعادی نشان داده می شود که

$$\frac{\delta}{x} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

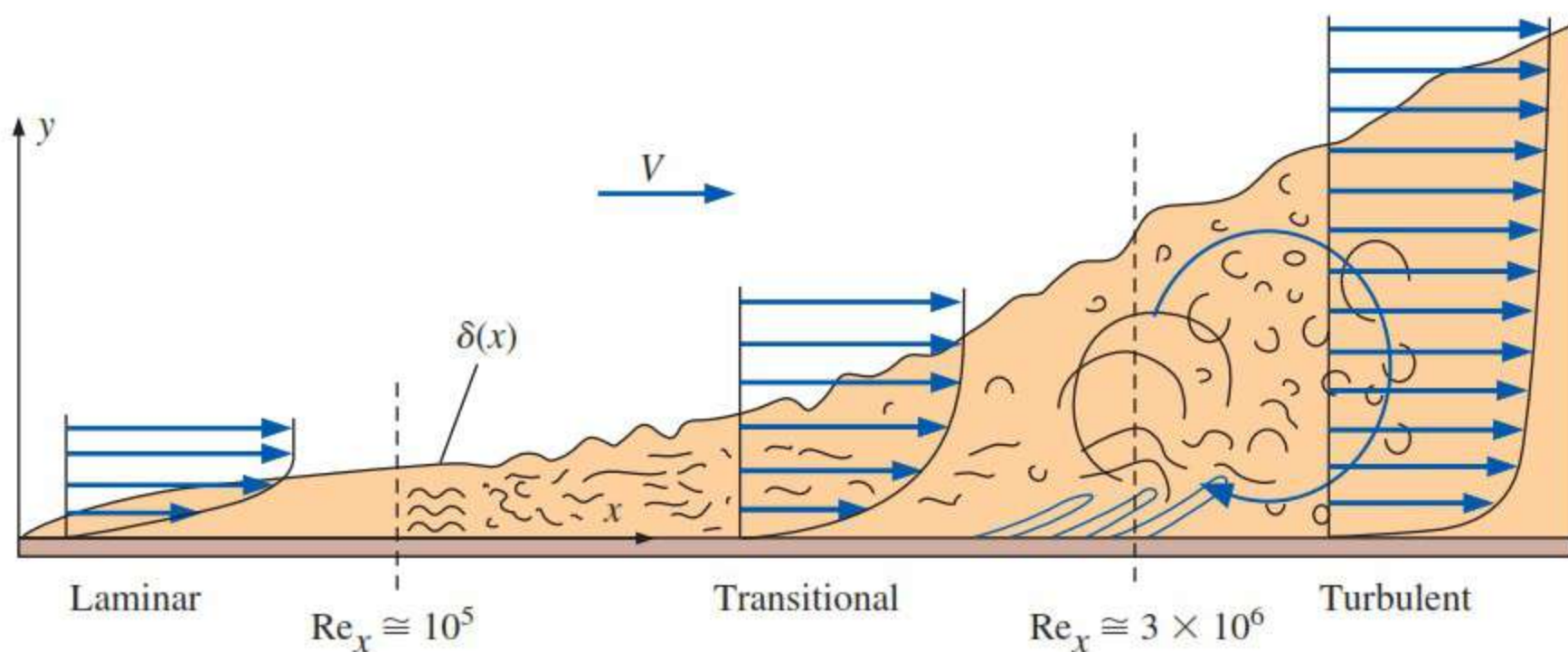
- با حرکت به سمت انتهای صفحه عدد رینولدز زیاد می شود و اغتشاشات جریان افزایش می یابد و فرآیند **انتقال** آغاز می شود.

• برای صفحه تخت صاف در معرض جریان یکنواخت، فرایند انتقال در

عدد رینولدز بحرانی $Re_{x,critical} = 1 \times 10^5$ آغاز میشود و تا

زمانیکه در $Re_{x,transition} = 3 \times 10^6$ تمام جریان کاملاً آشفته

شود، ادامه دارد.



- در جریان های مهندسی واقعی انتقال به جریان آشفته معمولا زودتر از مقادیر داده شده برای صفحه تخت صاف در معرض جریان یکنواخت رخ می دهد.

- عوامل موثر بر انتقال سریعتر از آرام به آشفته:

✓ زبری سطح

✓ اغتشاشات جریان بالا دست

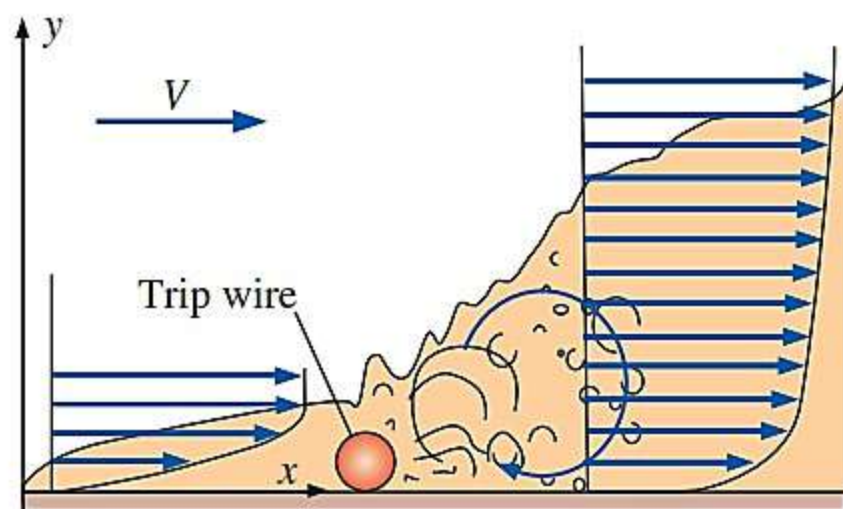
✓ نویز صوتی

✓ غیردائمی بودن جریان

✓ ارتعاشات

✓ انحنای صفحه

عدد رینولدز بحرانی مهندسی
 5×10^5 است.



Laminar

Transitional

Turbulent

استفاده از **trip wire** جهت
آشفته کردن زودتر جریان

لایه مرزی آرام (معادلات لایه مرزی)

- پس از درک فیزیکی لایه مرزی نیاز است معادلات حرکت در این محدود استخراج شود.

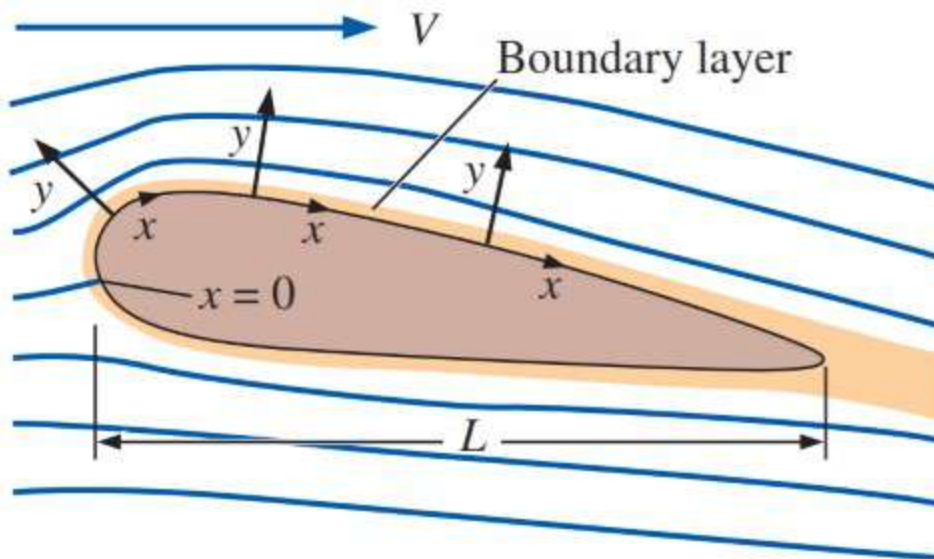
- فرضیات:

- ✓ جریان دائمی

- ✓ جریان دوبعدی

- ✓ اثر گرانش صرفنظر می شود (چون سطح آزاد وجود ندارد)

- ✓ جریان آرام



در دستگاه مختصات لایه مرزی X همواره موازی سطح و Y عمود بر سطح است.

- معادلات بدون بعد ناویر-استوکس که ترم غیردائمی شتاب و گرانش آن حذف شده است.

$$(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[Eu] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{Re} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

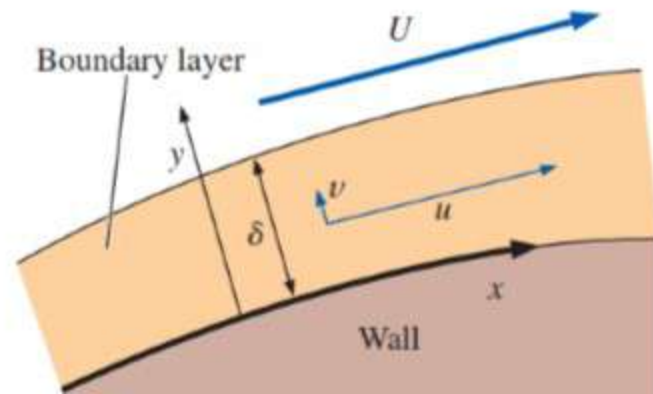
- با استفاده از مرتبه بزرگی ترم های کوچک در لایه مرزی را می توان حذف کرد.

$$\Delta P = P - P_{\infty} \sim \rho V^2 \quad u \sim U \quad \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L} \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$$

با کمک معادله پیوستگی دوبعدی تراکم ناپذیر

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta} \quad \Rightarrow \quad v \sim \frac{U\delta}{L}$$

از آنجا که $\frac{\delta}{L} \ll 1$ پس $v \ll u$



• تعریف متغیرهای بی بعد لایه مرزی

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{\delta} \quad u^* = \frac{u}{U} \quad v^* = \frac{vL}{U\delta} \quad P^* = \frac{P - P_\infty}{\rho U^2}$$

همه کمیت های بدون بعد بالا نرمال شده هستند یعنی مرتبه بزرگی آنها یک است.
 حال کمیت های بدون بعد در مولفه های X و Y ناویر استوکس جایگزین می شود.

• مولفه Y معادله ناویر استوکس

$$\underbrace{\frac{u}{u^*U} \frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*} \frac{v^*U\delta}{L^2}} + \underbrace{\frac{v}{v^* \frac{U\delta}{L}} \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*} \frac{v^*U\delta}{L\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{P^*\rho U^2}{\delta}} + \underbrace{v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{v \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \frac{v^*U\delta}{L^3}} + \underbrace{v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{v \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \frac{v^*U\delta}{L\delta^2}}$$

بعد از ساده سازی و ضرب معادله در $L^2/(U^2\delta)$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{v}{UL}\right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{v}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

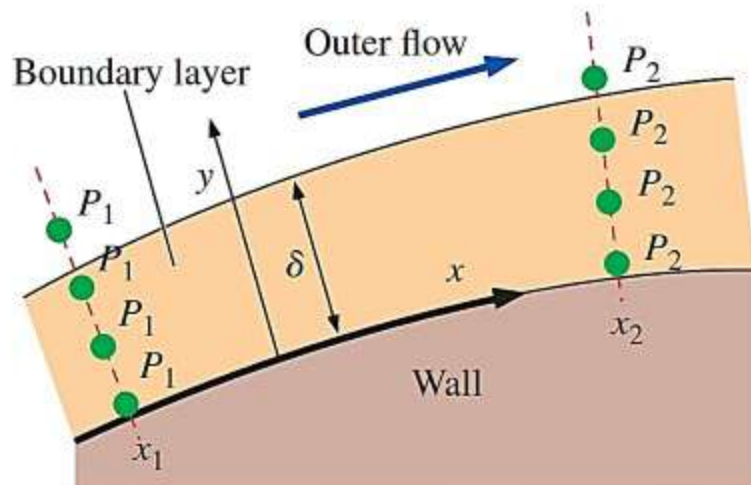
$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

• در ترم دوم و سوم سمت راست مرتبه بزرگی بسیار کمتر از ۱ است چون $Re_L = \frac{UL}{\nu} \gg 1$ پس این دو ترم در مقایسه با ترم اول سمت راست قابل صرف نظر اند.

• از آنجا که $L \gg \delta$ بزرگی ترم گرادیان فشار نسبت به ترم های شتاب محلی سمت چپ بیشتر است پس ترم های سمت چپ هم حذف می شوند

در نتیجه مولفه y ناویر-استوکس به فرم بدون بعد زیر ساده می شود $\frac{\partial P^*}{\partial y^*} \cong 0$ و فرم با بعد

$$\frac{\partial P}{\partial y} \cong 0$$



فشار در یک مقطع در لایه مرزی در جهت عمودی تقریباً ثابت است. 76

• مولفه X معادله ناویر استوکس

از معادله y به دست آمده که فشار تابع y نیست پس $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}$

$$\underbrace{\frac{u}{u^*U} \frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x^*} \frac{u^*U}{L}} + \underbrace{\frac{v}{v^* \frac{U\delta}{L}} \frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y^*} \frac{u^*U}{\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{P^*\rho U^2}{L}} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{v \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \frac{u^*U}{L^2}} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{v \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \frac{u^*U}{\delta^2}}$$

پس از ساده سازی و ضرب معادله در L/U^2

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

- ترم دوم سمت راست کوچکتر از ترم های سمت چپ است.
- مرتبه بزرگی حاصل ضرب عبارات پیرانتزهای ترم آخر سمت راست یک است و این ترم حذف نمی شود.

$$\left(\frac{\nu}{UL}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1$$

- فرم ساده شده با بعد مولفه X معادله ناویر-استوکس

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{constant} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

معادلات لایه مرزی در صفحه xy بدون اثرات گرانش

• برای جریان آرام، تراکم ناپذیر دائمی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

استخراج شده توسط پیرانتل

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- بلازیوس معادلات لایه مرزی آرام را به صورت تحلیلی حل کرد

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

معادلات لایه مرزی

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

شرایط مرزی

$$u = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad u = U \quad \text{as } y \rightarrow \infty$$

$$v = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad u = U \quad \text{for all } y \quad \text{at } x = 0$$

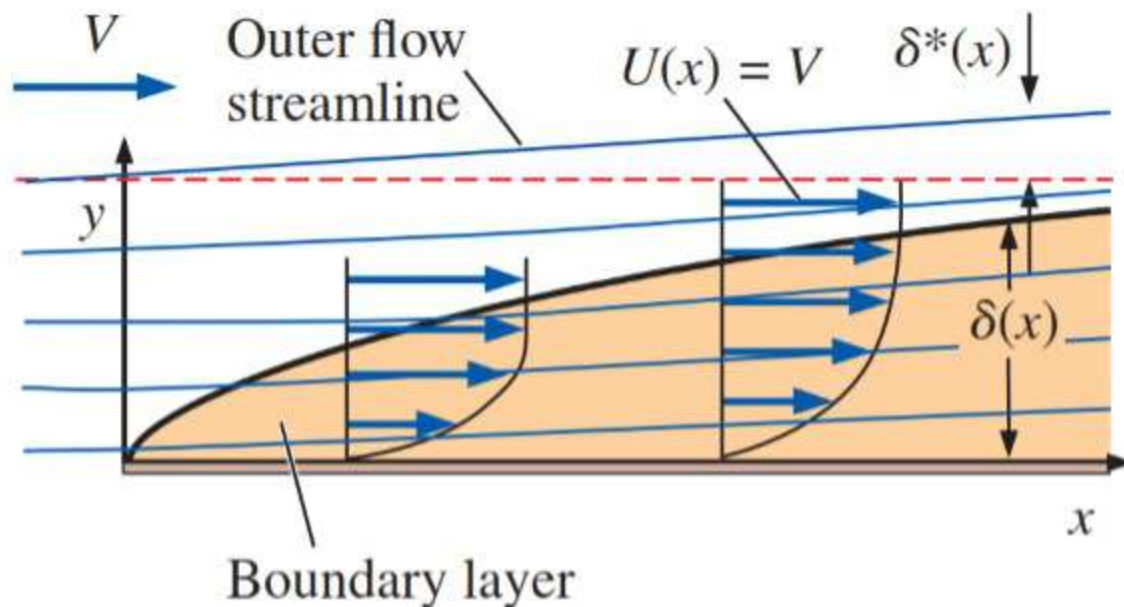
$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\tau_w = 0.332 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

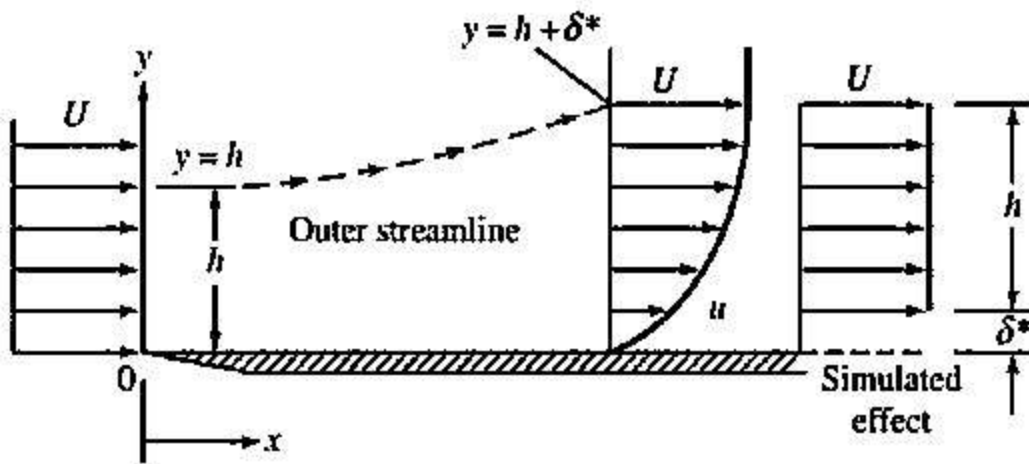
$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

ضخامت جابجایی

- فاصله ای که خطوط جریان بیرون لایه مرزی باید منحرف شوند تا اصل بقا جرم بین جریان های ورودی و خروجی ارضا شود.
- در واقع خطوط جریان بالا دست موازی اند اما به دلیل لایه مرزی و کاهش سرعت در این ناحیه برای ارضا بقا جرم باید خطوط جریان به سمت بیرون منحرف شوند



ضخامت جابجایی



$$\delta = \delta^* + h$$

$$\int_0^h \rho U b dy = \int_0^\delta \rho u b dy \Rightarrow \int_0^h U dy = \int_0^\delta u dy$$

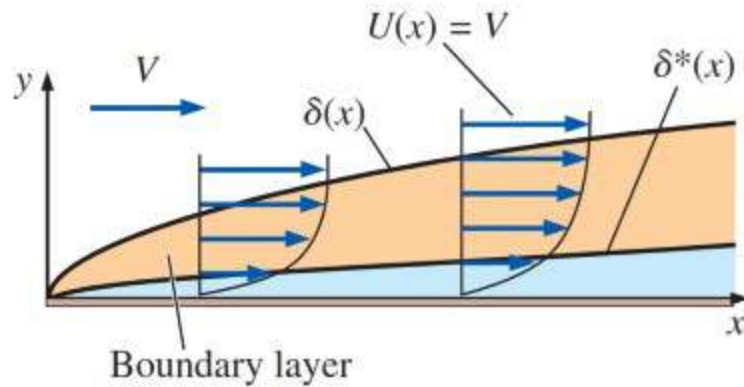
$$Uh = \int_0^\delta u dy = \int_0^\delta (U + u - U) dy = \int_0^\delta U dy + \int_0^\delta (u - U) dy$$

$$Uh = U\delta + \int_0^\delta (u - U) dy = U(\delta^* + h) + \int_0^\delta (u - U) dy \Rightarrow Uh = U\delta^* + Uh + \int_0^\delta (u - U) dy \Rightarrow$$

$$U\delta^* + \int_0^\delta (u - U) dy = 0 \Rightarrow U\delta^* = \int_0^\delta (U - u) dy \Rightarrow$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

- ضخامت جابجایی با فاصله گرفتن از لبه صفحه رشد می کند
- برای لایه مرزی آرام (حل تحلیلی بلازیوس)



$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

ضخامت مومنتوم

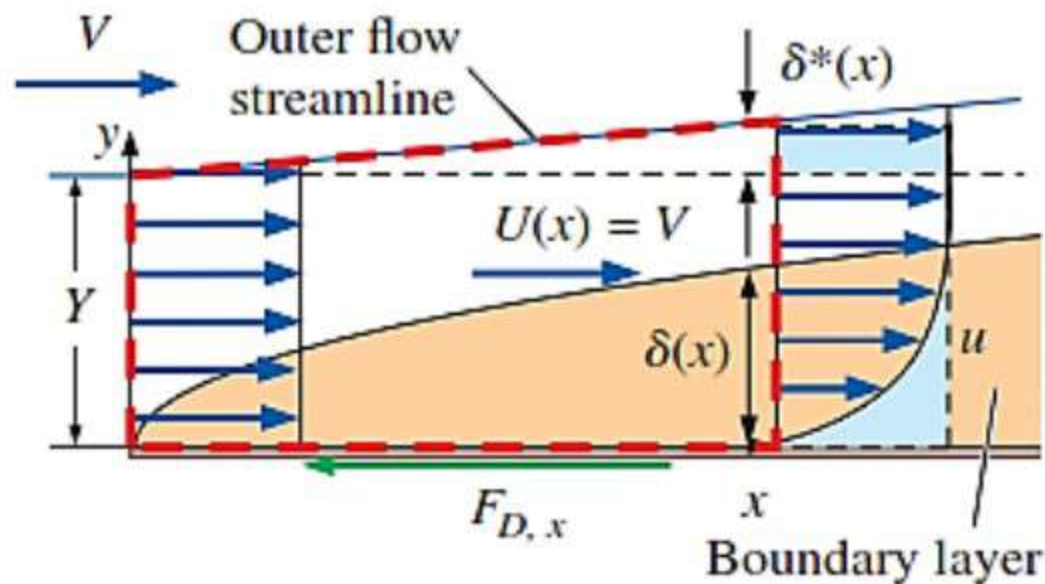
- مومنتوم از دست رفته بر واحد عرض ناشی از رشد لایه مرزی تقسیم بر ρU^2

$$\theta = \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

برای لایه مرزی آرام (حل تحلیلی بلازیوس)

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

- با در نظر گرفتن حجم کنترل شکل داده شده و با کمک قانون بقای مومنتوم، رابطه ضغامت مومنتوم را استخراج کنید



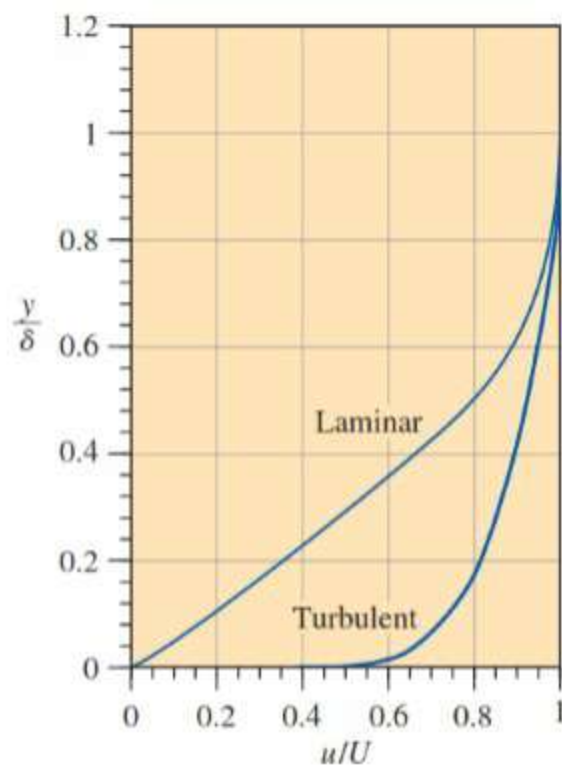
$$\theta = \int_0^Y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

لایه مرزی آشفته

- مشخصات لایه مرزی آشفته به صورت تجربی یا نیمه تجربی به دست می آیند چرا که امکان حل معادلات لایه مرزی برای جریان آشفته وجود ندارد.

- یکی از تقریب های تجربی برای پروفیل سرعت لایه مرزی آشفته قانون توانی یک هفتم است.

$$\frac{u}{U} \cong \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad \text{for } y \leq \delta$$



Property	Laminar	(a)	(b)
		Turbulent ^(†)	Turbulent ^(‡)
Boundary layer thickness	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Displacement thickness	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Momentum thickness	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Local skin friction coefficient	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$

* Laminar values are exact and are listed to three significant digits, but turbulent values are listed to only two significant digits due to the large uncertainty affiliated with all turbulent flow fields.

† Obtained from one-seventh-power law.

‡ Obtained from one-seventh-power law combined with empirical data for turbulent flow through smooth pipes.

لایه مرزی آشفته

آشفستگی حرکت نامنظمی است که عموماً زمانی که سیالات از روی سطوح جامد عبور می‌کنند یا حتی هنگامی که جریان‌هایی از یک نوع سیال در مجاورت هم قرار گرفته یا از روی یکدیگر عبور می‌کنند، دیده می‌شود.

آشفستگی یک پدیده ناپایدار و نامنظم است. وسعت این بی‌نظمی چنان زیاد است که به هر اندازه هم که سعی در تکرار شرایط مرزی برای یک جریان مورد نظر شود باز هم جزییات جریان هرگز تکرار نخواهند شد.



When I meet God, I am going to ask him two questions: Why relativity? And why turbulence? I really believe he will have an answer for the first.

— Werner Heisenberg —